重庆出版社科学学术著作出版基金资助

# 变形体非协调理论

郭仲衡 梁浩云 编著

重庆出版社



郭仲衡 梁浩云 编著

重庆出版社出版

# 变形体非协调理论

责任编辑　夏树人
封面设计　王晓姗

郭仲衡　梁浩云编著
变形体非协调理论

重庆出版社出版、发行（重庆长江二路205号）
新　华　书　店　经　销　　重庆印制一厂印刷
*
开本850×1168 1/32 印张 11.375 插页 4 字数 275 千
1989 年 2 月第一版　　1989 年 2 月第一版第一次印刷
印数：1—1,750
*
ISBN 7-5366-0736-9/O·6
科技新书目 188—267　　定价：5.55元

**献　给**

**Kazuo Kondô（近藤一夫）**

**和**

**Ekkehart Kröner**

## 《应用数学和力学》讲座丛书序

《应用数学和力学》编委会为了适应四化建设的需要，推动应用数学和力学方面的学术交流，自去年5月起在全国各地举办不定期的《应用数学和力学》讲座，由本刊编委同志义务分任主讲，讲授有关专题，介绍最新成就，深得各方同志支持和欢迎。1980年已举办讲座5期，今后将继续举办。由于场地、名额所限，希望能参加听讲而向隅的同志很多，纷纷提出要求。为此，特将讲座材料内容，编成丛书，陆续分册出版，以供读者。

长期以来，应用数学和力学是相辅相成的。晚近的发展更加如此。例如：由于人类生产活动的飞速发展，生产材料的日益更新，我们要处理比弹性、塑性，不可压缩流体，非粘性流体等更为复杂的介质，从而要研究有记忆性能的材料、有极化性质的材料和有非局部性质的材料等的力学性质。为了描述这些力学性质，人们就要求大量使用泛函分析和群论的方法。又例如：为了处理巨型的机械、特大的载荷和高速的运动，人们面对着大量的非线性问题。为了处理这些非线性问题，20年来，力学界开发了奇异摄动理论的研究。又例如：计算机的发展，提供了力学原理直接用于工程上复杂结构物强度计算的可能性，从而开创了近代的有限元理论，以及和有限元理论密切相关的广义变分原理。其它如嘉当张量之用于极化材料的分析，突变理论之用于处理稳定性问题，沃许函数之用于映象理论等，也无不如此。此外，随机过程和模糊数学等学科的发展，也正深刻地反映在力学原理处理真实生产问题的过程之中，从而使生产问题的处理更真实地反映

了现实。

《应用数学和力学》讲座和讲座丛书，将尽可能地反映这种日新月异的发展情况。

《应用数学和力学》编委会谨借丛书发行之际，向主讲的编委同志和编辑部的工作同志们致谢，由于他们的无私劳动和辛勤努力，讲座才能办成，丛书才得出版。

恳请读者不吝指教，对本丛书的任何意见，都将是对《应用数学和力学》编委会工作的支持和爱护。

钱伟长

1981年1月29日于北京清华园照澜院

# 序　言

1983年4—5月份，我曾在杭州由《应用数学和力学》编委会主办的第23期《应用数学和力学》讲座上主讲了与书名相同的系统讲座。梁浩云同志担任了该讲座的辅导工作。这本书是在当时的讲义基础上由梁浩云同志进行整理和补充而成的。由于时间仓促，挂一漏万在所难免，请读者指正。

郭仲衡
(Guo Zhong-heng)
1987年12月于北京大学

# 前 言

1901年Weingarten发表了关于任意闭回路上位移和转动的跳跃为恒量的著名定理。6年之后，Volterra又提出两大类基本畸变（distortion）形式。这两事件为以后的位错理论，或更一般的缺陷理论奠定了基础。Volterra是这样考虑的：将一个圆筒沿其母线切开，如果将第一个切面对另一个切面进行相对平移，我们就有Volterra第一类畸变，或叫位错（dislocation）。如果是相对转动，那就有第二类畸变，即向错（disclination）。也有个别作者提出叫做螺错（dispiration）的第三类畸变形式。关于螺错是否构成一种独立的畸变形式，尚有争议。在这里我们将不涉及它。

另一方面，金相学家们早就观察到在金属塑性区域内的滑移。许多理论家就用位错理论来解释塑性现象。冷加工和辐照等在金属中也会引起位错的出现。内应力问题也不能完全在经典理论范围内解决。经典理论的一个重要标志是变形的协调性，即每个物体点变形后在空间都有一个唯一确定的位置。如果对物体的假想微元施加任意变形，一般而言，若不再另加变形，我们不能将这些变形的微元重新拼合为一个变了形的物体整体。我们说，这种变形是非协调的。只有满足某些限制——"协调条件"，换言之，变形必须是协调的，变形后微元才能无缝地拼合起来。我们也可以类似地来想象内应力问题。如果将一个有内应力的物体分割成微元，这些微元就被释放为无应力状态。这些解放后的微元一般也不能无缝地拼合成一个处于自然状态（即各点应力为零）

的物体。

解决这种非协调问题，存在着众多的学派，他们间的结果有些也并不一致。这里只能选择性地讲述其中的某些，包括：线性的缺陷连续统理论，缺陷理论与非黎曼几何的对应，变形体非协调理论的理性理论和位错与向错的规范场理论。在介绍各种方法之前，都对所需的数学工具作一简单介绍，尽可能使叙述自成系统。

首先，我们将引进三种不同程度的非协调性使线性的连续统理论从经典弹性理论脱胎出来。讲述将采用绝对符号法。引进线、面、体δ-函数使得我们能用缺陷的连续统理论去处理孤立位错和缺陷。这是前五章的内容。在第六章我们简单介绍位错和向错的运动。

我们生活所在的是欧氏空间，所谓协调与不协调是相对这个空间而言的。是否可以超脱出这个空间而进入更一般的抽象空间，从另一个角度考虑问题呢？回答是肯定的。这时非协调性的矛盾就转化为选择具有适当性质的空间的矛盾，这些非欧空间所具有的曲率、挠率等等将可通过某种方法与刻划非协调性的种种缺陷度量建立对应关系。从50年代初期起，日本的近藤一夫，英国的 Bilby 和德国的 Kröner 等人就是这样创造性地把抽象的微分几何用于解决缺陷问题。Kröner 认为：“位错和内应力的一般理论惊人地和广义相对论相似，后者促进了微分几何的发展，使之具有今天的能简单地表示复杂关系的漂亮形式。但又不同于广义相对论，摆脱了人为的（speculative）结构，只依赖实在的基本法则。位错的连续统理论表明了，如何可以利用连络、Einstein 张量等概念来建立一个没有内在矛盾的物理理论。”个别作者则仍保留在欧氏空间的框架内，但采用非完整标架的办法。也有从下面这样一个现象得到启发而试图在高维空间解决问题的：停留在二维欧氏空间里，考虑薄板翘曲的问题是不可能的，因它翘曲

成为一个浸在三维欧氏空间里的曲面。在第七、八章我们将主要介绍非黎曼几何的有关内容和用非黎曼空间描述缺陷的方法。

从推广经典理论入手的第一种方法也好，用非黎曼几何的方法也好，都在于处理问题的几何——拓扑描述的方面。最后仍然假设缺陷度量例如非协调度或位错密度等为已知，然后按经典方法解决问题。

理性力学工作者试图将问题统一地考虑，使之构成一个完整的数学问题。从60年代中期起，Noll，C. C. Wang等人的工作已经显示，一旦关于物质的本构假设建立起来，附于物质流形的本构方程将完全确定了物质流形的几何结构。于是，几何结构是理论的自然结果，而不是作为理论的出发点的最初假设。当然，为了应用数学工具又添加了光滑性等一些局限，理论还有待进一步完善和发展。在第十章我们介绍一下这样的一个理论框架。由于整个讨论都是在物质流形上展开的，在第九章有必要介绍流形论的初步知识。

规范场理论在建立近代物理的基本粒子理论中获得了巨大的成功。位错理论与广义相对论的惊人相似启发人们用近代物理中规范场论的方法去处理位错和向错的问题。1978、1979年国内外相继发表了位错规范场理论的结果，到了1983年第一本关于位错和向错的规范场理论的专著问世了。缺陷的规范场理论是近几年才展开的方兴未艾的研究领域，在最后一章我们简单介绍有关结果以期引起读者的关注。

## 内 容 简 介

本书介绍线性的缺陷连续统理论、缺陷理论与非黎曼几何的对应、变形体非协调理论的理性理论和位错与向错的规范场理论，以期读者对变形体非协调理论的全貌有所了解，并为深入研究非协调问题打下初步的基础。本书体系严谨，叙述简明清晰，力求自成系统，可供应用数学和力学工作者和理工科大学师生学习参考。

本丛书原由四川人民出版社和四川科学技术出版社先后出版。自1985年4月起，本丛书由重庆出版社继续出版。

# 目　录

# 第一章　绝对符号法

在建立第一种缺陷理论时，我们将停留在三维欧氏空间内．自然界的运动法则以及所出现的几何量或物理量是与坐标系无关的，因此任何物理法则原则上必须用不依赖于坐标的量来表达．但是处理具体问题时，又总得引进一个比较方便的坐标系．这样一来物理法则的表达式中将夹杂了由具体坐标系所招致的与原来物理法则完全无关的东西．这在理论研究中有时会引起不必要的复杂化，甚至遮盖了所反映的物理实质．为了摆脱这种情况，不用坐标系的抽象记法（绝对符号法）具有很大的吸引力．它简单明晰，物理图象突出．只运用标量和向量的一些力学分支广泛应用这种方法．但是在出现比向量更复杂的物理量的力学分支里，单纯的抽象记法有时显得并不方便，而既采用坐标系又摆脱具体坐标系的影响的张量分量形式在运算过程中有时较为简单．两者的桥梁是并矢记法．我们将不固执地局限于同一种方法，但结果总是用绝对符号法表出．

## §1.1　坐标系和求和约定

在三维欧氏空间 $R^3$ 内我们将采用单一的笛氏（右手）坐标系 $\{O, x_i\}$，基向量为 $\mathbf{e}_i (i=1,2,3)$．任意向量 $\mathbf{u}$ 可以表达为这三个基向量的线性组合

$$\mathbf{u}=u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2+u_3\mathbf{e}_3=u_i\mathbf{e}_i \tag{1.1.1}$$

这里采用了 Einstein 求和约定：凡重复一次且仅一次的下标均

从 1 到 3 求和．重复的指标叫哑指标，可以任意代换．于是

$$\mathbf{x}=x_i\mathbf{e}_i$$

表示一点的位置向量．

## §1.2 二阶张量的定义

二阶张量是一个线性算子，它把三维欧氏空间的任意一个向量变换成同一个空间的另一个向量：

$$\boldsymbol{\varphi}:R^3\to R^3\cdot$$

$$\boldsymbol{\varphi}\mathbf{a}=\mathbf{b},\ \mathbf{a},\mathbf{b}\in R^3. \tag{1.2.1}$$

显然对二阶张量可以定义加法和数乘运算，因此全体二阶张量构成一个九维线性空间．

我们再引进**张量积**的概念．对于任意两个向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$，我们称 $\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的张量积，它是这样的一个二阶张量：对任意一个向量 $\mathbf{w}\in R^3$，由

$$(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\mathbf{w}=(\mathbf{v}\mathbf{w})\mathbf{u} \tag{1.2.2}$$

给出一个与 $\mathbf{u}$ 共线的向量，它表示对张量积中的第一个向量的放大或缩小．假设一个二阶张量 $\boldsymbol{\varphi}$ 对基向量 $\mathbf{e}_i$ 的作用为

$$\boldsymbol{\varphi}\mathbf{e}_i=\varphi_{ji}\mathbf{e}_j, \tag{1.2.3}$$

由于 $\boldsymbol{\varphi}$ 是线性变换，因此 $\boldsymbol{\varphi}$ 对任一向量 $\mathbf{w}=w_i\mathbf{e}_i$ 的作用可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}\mathbf{w}&=\boldsymbol{\varphi}(w_i\mathbf{e}_i)=w_i(\boldsymbol{\varphi}\mathbf{e}_i)=\varphi_{ji}w_i\mathbf{e}_j\\&=\varphi_{ji}(\mathbf{e}_i\mathbf{w})\mathbf{e}_j=\varphi_{ji}(\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_i)\mathbf{w},\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

由 $\mathbf{w}$ 的任意性我们得到

$$\boldsymbol{\varphi}=\varphi_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j, \tag{1.2.5}$$

它表明任一个二阶张量都可以表成基向量 $\mathbf{e}_i$ 的张量积的线性组合．因此，基向量的张量积 $\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$（九个二阶张量）构成了由全体二阶张量组成的九维线性空间的一组基．$\varphi_{ij}$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 在这组基上

的分量。(1.2.5)式称为二阶张量的并矢表示。单位张量是

$$\mathbf{I}=\delta_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j, \tag{1.2.6}$$

它对任一向量 $\mathbf{u}$ 作用得到 $\mathbf{u}$ 本身：

$$\mathbf{I}\mathbf{u}=\mathbf{u}. \tag{1.2.7}$$

(1.2.6)式中

$$\delta_{ij}\overset{\mathrm{df}}{=}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j\\ 0, & \text{当 } i\neq j\end{cases} \tag{1.2.8}$$

称为 Kronecker 符号。利用并矢记法我们可以定义三阶及更高阶的张量。例如，最简单的三阶张量是置换张量（Eddington 张量）

$$\boldsymbol{\epsilon}=\epsilon_{ijk}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_k, \tag{1.2.9}$$

其中

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}&\overset{\mathrm{df}}{=}[\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k]\\ &=\begin{cases}1, & \text{当 } i,j,k \text{ 是}(1,2,3)\text{的偶数次置换}\\ -1, & \text{当 } i,j,k \text{ 是}(1,2,3)\text{的奇数次置换}\\ 0, & \text{其它情况}\end{cases}\end{aligned} \tag{1.2.10}$$

称为 Ricci 符号，方括号表示三个向量的混合积。为了今后运用的方便，我们可以引进广义 Kronecker 符号

$$\begin{aligned}\delta_{ijkrst}&\overset{\mathrm{df}}{=}\epsilon_{ijk}\epsilon_{rst}\\ &=[\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k][\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_s,\mathbf{e}_t],\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

它有六个下标，是一个六阶张量。由向量代数我们知道

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}][\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g}]=\begin{vmatrix}\mathbf{ae} & \mathbf{af} & \mathbf{ag}\\ \mathbf{be} & \mathbf{bf} & \mathbf{bg}\\ \mathbf{ce} & \mathbf{cf} & \mathbf{cg}\end{vmatrix}, \tag{1.2.12}$$

所以

$$\delta_{ijkrst}=\begin{vmatrix}\delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it}\\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt}\\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt}\end{vmatrix}. \tag{1.2.13}$$

由此我们得到 $\epsilon_{ijk}$ 和 $\delta_{ij}$ 的关系（$\epsilon$-$\delta$ 恒等式）：

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{rsk}=\delta_{ir}\delta_{js}-\delta_{is}\delta_{jr}, \tag{1.2.14}$$

而且

$$\epsilon_{isi}\epsilon_{jsi}=2\delta_{ij}. \tag{1.2.15}$$

## §1.3 张量的简单代数运算

下面不加证明地列举几种在下文将用到的张量的代数运算（以二阶张量为例），其结果仍然是张量。

（1） 加法

两个同型的张量才能相加，其和

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}&=\xi_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j+\eta_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\\&=(\xi_{ij}+\eta_{ij})\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\\&\overset{\text{df}}{=}\zeta_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j=\boldsymbol{\zeta}\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

仍是同型的张量，其中

$$\zeta_{ij}=\xi_{ij}+\eta_{ij}. \tag{1.3.2}$$

（2） 并乘

任何两个张量的并乘（张量积）定义为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}&=(\xi_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j)\otimes(\eta_{st}\mathbf{e}_s\otimes\mathbf{e}_t)\\&=(\xi_{ij}\eta_{st})\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_s\otimes\mathbf{e}_t\\&\overset{\text{df}}{=}\zeta_{ijst}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_s\otimes\mathbf{e}_t=\boldsymbol{\zeta},\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

或

$$\zeta_{ijst}=\xi_{ij}\eta_{st}. \tag{1.3.4}$$

它的阶等于这两个张量的阶之和，应注意的是张量的并乘与次序有关。

（3） 点乘

两个张量并列在一起表示它们的点乘，即前一个量的并矢表

示中的最后一个基向量点乘后一个量的第一个基向量，例如

$$\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}=(\varphi_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j)(\psi_{rs}\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{e}_s)$$
$$=\varphi_{ij}\psi_{rs}\delta_{jr}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_s$$
$$=\varphi_{ij}\psi_{js}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_s. \tag{1.3.5}$$

（4） 取迹运算

若抹去一个二阶张量并矢表示中的⊗，就得到该张量的迹：

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{\varphi}\overset{\mathrm{df}}{=}\varphi_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=\varphi_{ii}, \tag{1.3.6}$$

它是一个标量。

（5） 转置

把二阶张量的两个基向量交换次序将得到一个新的张量，叫原来张量的转置（共轭）张量，用"*"表示：

$$\boldsymbol{\varphi}^*=(\varphi_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j)^*=\varphi_{ij}\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_i. \tag{1.3.7}$$

（6） 双点乘

"："表示两个二阶张量的**双点乘**，有

$$\boldsymbol{\varphi}:\boldsymbol{\psi}\overset{\mathrm{df}}{=}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varphi}^*\boldsymbol{\psi})=\varphi_{ij}\psi_{ij}. \tag{1.3.8}$$

对高于二阶的张量的相应运算见参考文献[3]。

进一步我们称张量 $\boldsymbol{\varphi}$ 是对称的，如果 $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}^*$；称 $\boldsymbol{\varphi}$ 是反对称的，如果$\boldsymbol{\varphi}^*=-\boldsymbol{\varphi}$。对称张量只有六个独立分量。而反对称张量 $\mathbf{W}=W_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$只有三个独立分量，它等价于一个向量 $\boldsymbol{\omega}=\omega_r\mathbf{e}_r$，两者的关系是：

$$\boldsymbol{\omega}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}:\mathbf{W}\qquad\left(\omega_i=-\frac{1}{2}\epsilon_{irs}W_{rs}\right) \tag{1.3.9}$$

$$\mathbf{W}=-\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\omega}\qquad(W_{ij}=-\epsilon_{ijk}\omega_k). \tag{1.3.10}$$

我们说 $\mathbf{W}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 互为对偶。

任一个二阶张量的对称部分是

$$\boldsymbol{\varphi}^S\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\varphi}^*),\ \left(\varphi^S_{ij}=\frac{1}{2}(\varphi_{ij}+\varphi_{ji})\right), \tag{1.3.11}$$

反对称部分是

$$\varphi^A \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{2}(\varphi - \varphi^*), \quad \left(\varphi^A_{ij} = \frac{1}{2}(\varphi_{ij} - \varphi_{ji})\right). \quad (1.3.12)$$

显然，任意二阶张量总可以表成它的对称部分和反对称部分之和：

$$\varphi = \varphi^A + \varphi^S. \quad (1.3.13)$$

各种运算的结果仍为张量的证明和进一步的代数运算参见文献[ 3 ]。

## §1.4 张量场及其微分运算

如果在空间某区域的每一点定义有同类型的一个张量，例如 $\varphi$，我们就有张量场 $\varphi(\mathrm{x}) = \varphi(x_i)$，它是随点而变化的。为了表示它的变化，用其微分

$$d\varphi(x_i) = dx_i \partial_i \varphi = \varphi_{,i} dx_i, \quad (1.4.1)$$

这里“$\partial_i$”和“$_{,i}$”均表示对 $x_i$ 的偏导数。引进 Hamilton 算子

$$\nabla \overset{\text{df}}{=} {}_{,i}\mathrm{e}_i, \quad (1.4.2)$$

例如对标量场 $f$：$f\nabla = f_{,i}\mathrm{e}_i$ 是以 $f$ 的偏导数为分量的向量场，于是

$$\begin{aligned} d\varphi(x_i) &= \varphi_{,i} dx_i = \varphi_{,i} \delta_{ij} dx_j = \varphi_{,i}(\mathrm{e}_i \mathrm{e}_j) dx_j \\ &= (\varphi_{,i} \otimes \mathrm{e}_i)(dx_j \mathrm{e}_j) = (\varphi \otimes \nabla) d\mathrm{x}. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

我们还可以写成

$$\begin{aligned} d\varphi(x_i) &= dx_i \partial_i \varphi = dx_i (\mathrm{e}_i \mathrm{e}_j) \partial_j \varphi \\ &= (dx_i \mathrm{e}_i)(\mathrm{e}_j \otimes \partial_j \varphi) = d\mathrm{x}(\nabla \otimes \varphi). \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

因此 Hamilton 算子也可以表示为

$$\nabla = \mathrm{e}_i \partial_i. \quad (1.4.5)$$

采用哪一种形式，取决于 $\nabla$ 从左边还是从右边作用于该张量场。而 $\varphi \otimes \nabla$ 称为右梯度，$\nabla \otimes \varphi$ 称为左梯度。它们是比原张量场高

一阶的新张量场。我们将用到下面三个不变性微分算子——(左)梯度，散度和旋度：

$$\mathrm{grad}\boldsymbol{\varphi}\overset{\mathrm{df}}{=}\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}=\partial_i\varphi_{jk}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_k, \tag{1.4.6}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi}\overset{\mathrm{df}}{=}\nabla\boldsymbol{\varphi}=\partial_i\varphi_{ik}\mathbf{e}_k, \tag{1.4.7}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{\varphi}\overset{\mathrm{df}}{=}\nabla\times\boldsymbol{\varphi}=\partial_i\varphi_{jk}\epsilon_{ijr}\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{e}_k. \tag{1.4.8}$$

显然易见，$\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi}$ 是比 $\boldsymbol{\varphi}$ 降一阶的张量，而 $\mathrm{rot}\boldsymbol{\varphi}$ 是和 $\boldsymbol{\varphi}$ 同型的张量。应注意的是在各个算子中 $\nabla$ 和 $\boldsymbol{\varphi}$ 的排列次序是重要的。例如

$$\boldsymbol{\varphi}\times\nabla=\varphi_{ij,k}\epsilon_{jkr}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_r \tag{1.4.9}$$

是和 $\nabla\times\boldsymbol{\varphi}$ 不同的张量。我们还将用到**散度定理**

$$\int_V dV\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi}=\oint_{S=\partial V}d\mathbf{S}\boldsymbol{\varphi} \tag{1.4.10}$$

和 **Stokes 定理**

$$\int_S d\mathbf{S}\mathrm{rot}\boldsymbol{\varphi}=\oint_{L=\partial S}d\mathbf{L}\boldsymbol{\varphi}, \tag{1.4.11}$$

这里 $\boldsymbol{\varphi}$ 可为任意张量，$d\mathbf{S}$ 为有向面元素，$d\mathbf{L}$ 为有向线元素。在散度定理中，封闭曲面 $S\overset{\mathrm{df}}{=}\partial V$，而在 Stokes 公式中封闭曲线 $L\overset{\mathrm{df}}{=}\partial S$，$\partial$ 表示区域边界之意。

如果 $\boldsymbol{\varphi}$ 是二阶张量，利用

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi}=\nabla\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}^*\nabla, \tag{1.4.12}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{\varphi})^*=-\boldsymbol{\varphi}^*\times\nabla \tag{1.4.13}$$

以及

$$\nabla\boldsymbol{\varphi}^*=\boldsymbol{\varphi}\nabla, \tag{1.4.14}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{\varphi}^*)^*=-\boldsymbol{\varphi}\times\nabla, \tag{1.4.15}$$

于是由

$$\int_V dV\nabla\boldsymbol{\varphi}^*=\oint_S d\mathbf{S}\boldsymbol{\varphi}^* \tag{1.4.16}$$

得到

$$\int_V \boldsymbol{\varphi}\nabla dV = \oint_S \boldsymbol{\varphi} d\mathbf{S}, \tag{1.4.17}$$

而 Stokes 公式变为

$$\int_S d\mathbf{S}\nabla \times \boldsymbol{\varphi}^* = \oint_L d\mathbf{L}\boldsymbol{\varphi}^* \tag{1.4.18}$$

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{\varphi}^*) d\mathbf{S} = \oint_L \boldsymbol{\varphi} d\mathbf{L} \tag{1.4.19}$$

即

$$\int_S -(\boldsymbol{\varphi} \times \nabla) d\mathbf{S} = \oint_L \boldsymbol{\varphi} d\mathbf{L}. \tag{1.4.20}$$

应该注意，公式（1.4.17）和（1.4.20）仅对二阶张量场成立。至此我们结束对绝对符号法的简单介绍。

# 第二章　小变形理论的协调条件

正如引言提及，经典理论假定每物体点变形后在空间都有唯一确定的位置，即有唯一确定的位移向量

$$\mathbf{u}=u_i\mathbf{e}_i. \tag{2.0.1}$$

在今后几章的讨论将局限在小变形范围内。此时位移梯度，即畸变张量

$$\boldsymbol{\beta}\overset{\text{df}}{=}\mathbf{u}\otimes\nabla, \qquad (\beta_{ij}=u_{i,j}) \tag{2.0.2}$$

的对称部分是应变张量

$$\mathbf{e}\overset{\text{df}}{=}\frac{1}{2}(\mathbf{u}\otimes\nabla+\nabla\otimes\mathbf{u}), \qquad \left(e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right). \tag{2.0.3}$$

若在$\mathbf{x}$点给定一个方向$\mathbf{n}$，可求$\mathbf{e}$的法分量为

$$e_n=\mathbf{n}\mathbf{e}\mathbf{n} \tag{2.0.4}$$

它给出该点沿$\mathbf{n}$方向的伸长度。于是给定$\mathbf{e}$，则该点任意方向变形中的伸长度都可以知道了。这一点所有方向的伸长度的总和构成该点的应变状态。

畸变张量$\boldsymbol{\beta}$的反对称部分是转动张量

$$\mathbf{W}\overset{\text{df}}{=}\frac{1}{2}(\mathbf{u}\otimes\nabla-\nabla\otimes\mathbf{u}), \qquad \left(W_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}-u_{j,i})\right). \tag{2.0.5}$$

它的对偶

$$\boldsymbol{\omega}\overset{\text{df}}{=}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}:\mathbf{W}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}:(\nabla\otimes\mathbf{u})$$

$$=\frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{u}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{u} \tag{2.0.6}$$

称为转动向量。它的几何意义代表转动。于是

$$\boldsymbol{\beta}=\mathbf{e}+\mathbf{W}, \qquad (2.0.7)$$

这表明畸变可分解为变形和转动两部分。对小变形，分解与次序无关。

在给定位移场$\mathbf{u}(\mathbf{x})$之后，上面各量（场）可以用(2.0.2～6)计算出来。反过来的问题是：如果把(2.0.2)，(2.0.3)或(2.0.5)（即(2.0.6)）作为包含未知位移场的方程，它们的左端$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$，$\mathbf{e}(\mathbf{x})$和$\mathbf{W}(\mathbf{x})$（或等价地$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$）需满足什么条件这些方程的解才存在？解是否唯一？这个解是否就是问题的位移场？这些条件就是各种类型的"协调条件"。

## §2.1 描述协调条件的几个定理

下面我们将以定理的形式对单连通物体给出协调条件。单连通体是指体内任意闭回路均可不离开物体地收缩为一点的物体。这一小节的讨论仅局限于这样的单连通物体。

**定理2.1** 给定的畸变场$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$确定位移场$\mathbf{u}(\mathbf{x})$（准确到任意整体刚性平移$\mathbf{u}^{\circ}=\mathbf{u}(\mathbf{x}^{\circ})$）的充要条件是在每物体点

$$\boldsymbol{\beta}\times\nabla=0。\qquad (2.1.1)$$

**证明** 必要性：设存在$\mathbf{u}(\mathbf{x})$使(2.0.2)成立，则(2.0.2)的右旋度给出(2.1.1)。因为$\mathbf{u}\otimes\nabla\times\nabla=0$，($\epsilon_{irs}u_{j,rs}=\epsilon_{isr}u_{j,sr}=-\epsilon_{irs}u_{j,rs}$，即$\epsilon_{irs}u_{j,rs}=0$)。

充分性：条件(2.1.1)通过Stokes定理

$$-\int_S(\boldsymbol{\beta}\times\nabla)dS=\oint_L\boldsymbol{\beta}d\mathbf{x}=0 \qquad (2.1.2)$$

使得下公式

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{u}^{\circ}+\int_{\mathbf{x}^{\circ}}^{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}d\mathbf{x}' \qquad (2.1.3)$$

中的积分与路径无关，因而(2.1.3)唯一确定一个以$\mathbf{u}^o$为精确度的向量场$\mathbf{u}(\mathbf{x})$。求(2.1.3)的右梯度可知这个向量场满足(2.0.2)，因而就是所求的位移场。证毕。

**定理2.2** 给定的应变场$\mathbf{e}(\mathbf{x})$确定位移场$\mathbf{u}(\mathbf{x})$准确到任意整体刚性运动——平移$\mathbf{u}^o\equiv\mathbf{u}(\mathbf{x}^o)$和转动$\mathbf{W}^o\equiv\mathbf{W}(\mathbf{x}^o)$的充要条件是在每物体点

$$\nabla\times\mathbf{e}\times\nabla=0. \tag{2.1.4}$$

**证明** 条件(2.1.4)的必要性是显然的，因为(2.0.3)的左右旋度

$$\nabla\times(\mathbf{u}\otimes\nabla)\times\nabla+\nabla\times(\nabla\otimes\mathbf{u})\times\nabla=0. \tag{2.1.5}$$

充分性一般是采用 Cèsaro 积分作构造性证明。为此，利用(2.0.4)及分部积分，(2.1.3)的积分可表成

$$\int_{\mathbf{x}^o}^{\mathbf{x}}\beta d\mathbf{x}'=\int_{\mathbf{x}^o}^{\mathbf{x}}(\mathbf{e}+\mathbf{W})d\mathbf{x}'$$

$$=\mathbf{W}\mathbf{x}-\mathbf{W}^o\mathbf{x}^o+\int_{\mathbf{x}^o}^{\mathbf{x}}[\mathbf{e}+\mathbf{x}'(\mathbf{W}\otimes\nabla)]d\mathbf{x}', \tag{2.1.6}$$

因为

$$W_{ij,k}=\frac{1}{2}(u_{i,j}-u_{j,i})_{,k}$$

$$=\frac{1}{2}(u_{i,jk}-u_{j,ik})+\frac{1}{2}(u_{k,ij}-u_{k,ji})$$

$$=\frac{1}{2}(u_{i,k}+u_{k,i})_{,j}-\frac{1}{2}(u_{j,k}+u_{k,j})_{,i}$$

$$=e_{ki,j}-e_{kj,i}$$

$$=\epsilon_{ijm}\epsilon_{mrs}e_{kr,s}=-\epsilon_{ijm}\epsilon_{msr}\partial_s e_{rk}$$

我们有

$$\mathbf{W}\otimes\nabla=-\epsilon\nabla\times\mathbf{e}. \tag{2.1.7}$$

利用这个结果及

$$(\mathbf{W}-\mathbf{W}^o)\mathbf{x}=\left[\int_{\mathbf{x}^o}^{\mathbf{x}}(\mathbf{W}\otimes\nabla)d\mathbf{x}'\right]\mathbf{x}$$

$$=-\int_{\mathbf{x}^o}^{\mathbf{x}}\mathbf{x}(\mathbf{W}\otimes\nabla)d\mathbf{x}', \qquad (2.1.8)$$

(2.1.6)变为

$$\int_{\mathbf{x}^o}^{\mathbf{x}}\beta d\mathbf{x}'=\mathbf{W}^o(\mathbf{x}-\mathbf{x}^o)+\int_{\mathbf{x}^o}^{\mathbf{x}}[\mathbf{e}+(\mathbf{x}'-\mathbf{x})(\mathbf{W}\otimes\nabla)]d\mathbf{x}'$$

$$=\mathbf{W}^o(\mathbf{x}-\mathbf{x}^o)+\int_{\mathbf{x}^o}^{\mathbf{x}}[\mathbf{e}-(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\epsilon(\nabla\times\mathbf{e})]d\mathbf{x}'$$

$$=\mathbf{W}^o(\mathbf{x}-\mathbf{x}^o)+\int_{\mathbf{x}^o}^{\mathbf{x}}[\mathbf{e}+(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\times(\nabla\times\mathbf{e})]d\mathbf{x}'. \qquad (2.1.9)$$

应该注意式中$\mathbf{x}'$是积分变量. 最后一积分与路径无关的充分条件是

$$[\mathbf{e}+(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\times(\nabla\times\mathbf{e})]\times\nabla=0, \qquad (2.1.10)$$

写成分量形式是

$$\{e_{in,p}+[\epsilon_{ikq}(x_k'-x_k)\epsilon_{qrs}\partial_r e_{sn}]_{,p}\}\epsilon_{npj}=0, \qquad (2.1.11)$$

这里“$,p$”是对积分变量$x_p'$求导, 式中只有$x_k'$和$e_{sn}$与之有关, 上式又可变为

$$[e_{in,p}+\epsilon_{ikq}\delta_{pk}\epsilon_{qrs}\partial_r e_{sn}+\epsilon_{ikq}(x_k'-x_k)\epsilon_{qrs}e_{sn,rp}]\epsilon_{npj}=0, \qquad (2.1.12)$$

由于

$$\epsilon_{ikq}\epsilon_{qrs}\delta_{pk}\partial_r e_{sn}=(\delta_{ir}\delta_{ps}-\delta_{is}\delta_{pr})\partial_r e_{sn}$$

$$=\partial_i e_{pn}-\partial_p e_{in}, \qquad (2.1.13)$$

上式中$\partial_i e_{pn}$关于$p$, $n$是对称的, 而$\epsilon_{npj}$关于$n$, $p$是反对称的, (2.1.13)的第一项乘上$\epsilon_{npj}$并求和后等于零. 而第二项与(2.1.12)的第一项相互抵消. 于是(2.1.12)变成

$$\epsilon_{ikq}(x_k'-x_k)\epsilon_{qrs}\partial_r e_{sn,p}\epsilon_{npj}=0. \qquad (2.1.14)$$

写成绝对形式有

$$(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\times(\nabla\times\mathbf{e}\times\nabla)=0. \tag{2.1.15}$$

由于(2.1.14)，这个条件是满足的。因此下公式

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{u}^o(\mathbf{x})+\mathbf{W}^o(\mathbf{x}-\mathbf{x}^o)+\int_{\mathbf{x}^o}^{\mathbf{x}}[\mathbf{e}+(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\times(\nabla\times\mathbf{e})]d\mathbf{x}' \tag{2.1.16}$$

唯一地确定一个向量场$\mathbf{u}(\mathbf{x})$，准确到由 $\mathbf{u}^o+\mathbf{W}^o(\mathbf{x}-\mathbf{x}^o)$表示的任意整体刚性运动。我们下面再证明该向量场就是 满 足(2.0.3)式的向量场。利用

$$\begin{aligned}d\mathbf{u}(\mathbf{x})&=d\mathbf{x}(\nabla\otimes\mathbf{u})\\&=-d\mathbf{x}\mathbf{W}^o+\lim_{s\to0}\frac{1}{s}\left\{\int_{\mathbf{x}^o}^{\mathbf{x}+sd\mathbf{x}}[\mathbf{e}+(\mathbf{x}'-\mathbf{x}-sd\mathbf{x})\right.\\&\quad\times(\nabla\times\mathbf{e})]d\mathbf{x}'\\&\quad\left.-\int_{\mathbf{x}^o}^{\mathbf{x}}[\mathbf{e}+(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\times(\nabla\times\mathbf{e})]d\mathbf{x}'\right\}\\&=d\mathbf{x}\left[-\mathbf{W}^o+\mathbf{e}+6\int_{\mathbf{x}^o}^{\mathbf{x}}\nabla\times\mathbf{e}d\mathbf{x}'\right],\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

由$d\mathbf{x}$的任意性得到

$$\nabla\otimes\mathbf{u}=-\mathbf{W}^o+\mathbf{e}+6\int_{\mathbf{x}^o}^{\mathbf{x}}\nabla\times\mathbf{e}d\mathbf{x}'. \tag{2.1.18}$$

转置有

$$\mathbf{u}\otimes\nabla=\mathbf{W}^o+\mathbf{e}-6\int_{\mathbf{x}^o}^{\mathbf{x}}\nabla\times\mathbf{e}d\mathbf{x}'. \tag{2.1.19}$$

将上两式相加并除以 2 得到(2.0.3)式，就是 说 由(2.1.16)确定的向量场确实满足方程(2.0.3)。证毕。

(2.1.4)式一般称为**圣维南协调条件**，它只有六个独立形式，即

$$\epsilon_{iqr}e_{rs,pq}\epsilon_{spj}=0. \tag{2.1.20}$$

为了弄清给定的转动场 W(x)能够确定u(x)到什么程度，我们将给出定理2.3。但是，为了证明定理2.3的充分性，先证明

**引理** 给定向量场

$$\mathbf{f}(x)=f_i\mathbf{e}_i \tag{2.1.21}$$

满足

$$\nabla\mathbf{f}=0, \quad (f_{i,i}=0) \tag{2.1.22}$$

则方程

$$\nabla\times\mathbf{v}=\mathbf{f} \tag{2.1.23}$$

的解存在，但可差一个有势向量场$\nabla\Phi$，其中势函数$\Phi(\mathbf{x})$可为任意。

**证明** 我们知道，线性方程组

$$\frac{dx_1}{f_1}=\frac{dx_2}{f_2}=\frac{dx_3}{f_3} \tag{2.1.24}$$

有两个线性无关的解（第一积分）

$$v^1=v^1(\mathbf{x}),\ v^2=v^2(\mathbf{x}). \tag{2.1.25}$$

对于两个确定的积分常数$v^1$和$v^2$，解(2.1.25)代表两个曲面，它们的交线的切向量$d\mathbf{x}$平行于$\mathbf{f}$，

$$\mathbf{f}\parallel d\mathbf{x}. \tag{2.1.26}$$

对(2.1.25)微分得

$$\left.\begin{aligned}0=dv^1=v^1_{,i}dx_i,\\ 0=dv^2=v^2_{,i}dx_i.\end{aligned}\right\} \tag{2.1.27}$$

如果我们记$dx_1/f_1=dx_2/f_2=dx_3/f_3=\alpha(\mathbf{x})$，这里比例常数$\alpha(\mathbf{x})$在各点可以是不一样的。以$dx_i=\alpha(\mathbf{x})f_i$代入(2.1.27)得到

$$\alpha(\mathbf{x})f_iv^1_{,i}=0. \tag{2.1.28}$$

由于$\alpha(\mathbf{x})\neq0$，于是有

$$f_iv^1_{,i}=0. \tag{2.1.29}$$

同样有

$$f_iv^2_{,i}=0. \tag{2.1.30}$$

所以(2.1.25)同时又是偏微分方程

$$f_i F_{,i}=0 \tag{2.1.31}$$

的解。曲面(2.1.25)的法方向都与f正交，即，$\nabla v^1$和$\nabla v^2 \perp \mathbf{f}$。因此f可表成

$$\mathbf{f}=\lambda(\nabla v^1)\times(\nabla v^2), \tag{2.1.32}$$

其中$\lambda=\lambda(\mathbf{x})$。上式写成分量形式是

$$f_i=\lambda\epsilon_{irs}v^1_{;r}v^2_{;s}。 \tag{2.1.33}$$

条件(2.1.22)变成

$$\begin{aligned}0=f_{i,i}&=(\lambda\epsilon_{irs}v^1_{;r}v^2_{;s})_{,i}\\&=\lambda_{,i}\epsilon_{irs}v^1_{;r}v^2_{;s}+\lambda\epsilon_{irs}(v^1_{;ri}v^2_{;s}+v^1_{;r}v^2_{;si})\\&=\epsilon_{irs}\lambda_{,i}v^1_{;r}v^2_{;s}\end{aligned} \tag{2.1.34}$$

即

$$[\nabla v^1,\ \nabla v^2,\ \nabla\lambda]=0。 \tag{2.1.35}$$

如果人为地引进一族曲面

$$v^3=v^3(\mathbf{x}), \tag{2.1.36}$$

使$(v^1,\ v^2,\ v^3)$构成空间的一个曲线坐标系，则在这个坐标系里Hamilton算子表达为

$$\nabla=\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}=\mathbf{e}_i\frac{\partial v^r}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial v^r}=\nabla v^r\frac{\partial}{\partial v^r}, \tag{2.1.37}$$

于是

$$\nabla\lambda=\nabla v^r\frac{\partial\lambda}{\partial v^r}。 \tag{2.1.38}$$

把上式代入(2.1.35)，

$$\begin{aligned}[\nabla v^1,\ \nabla v^2,\ \nabla\lambda]&=\left[\nabla v^1,\ \nabla v^2,\ \nabla v^r\frac{\partial\lambda}{\partial v^r}\right]\\&=\left[\nabla v^1,\ \nabla v^2,\ \nabla v^3\frac{\partial\lambda}{\partial v^3}\right]\\&=\frac{\partial\lambda}{\partial v^3}[\nabla v^1,\ \nabla v^2,\ \nabla v^3]=0。\end{aligned} \tag{2.1.39}$$

因为式中的混合积恒不为零，故$\partial\lambda/\partial v^3=0$，这表明$\lambda$与$v^3$无关，即

$$\lambda=\lambda(v^1,\ v^2). \qquad (2.1.40)$$

令 $$\phi(v^1,\ v^2)=\int\lambda dv^1,$$

则 $$\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial v^1}\nabla v^1+\frac{\partial\phi}{\partial v^2}\nabla v^2=\lambda\nabla v^1+\frac{\partial\phi}{\partial v^2}\nabla v^2, \qquad (2.1.41)$$

将上式代入(2.1.32)，并记$v^2\equiv\psi$得

$$\mathbf{f}=\left(\nabla\phi-\frac{\partial\phi}{\partial v^2}\nabla v^2\right)\times(\nabla v^2)$$

$$=(\nabla\phi)\times(\nabla\psi). \qquad (2.1.42)$$

结论是：任何足够光滑的无源向量场f可表成两个标量场的梯度的向量积。容易验证$\mathbf{v}=\phi\nabla\psi$就是方程(2.1.23)的一个特解，因为

$$v_i=\phi\psi_{,i}, \qquad (2.1.43)$$

$$\epsilon_{irs}\partial_r v_s=\epsilon_{irs}\partial_r(\phi\psi_{,s})$$

$$=\epsilon_{irs}\phi_{,r}\psi_{,s}+\epsilon_{irs}\phi\psi_{,rs}$$

$$=f_i. \qquad (2.1.44)$$

而我们知道与(2.1.23)对应的齐次方程$\nabla\times\mathbf{v}=0$的通解为$\nabla\Phi$，因此方程(2.1.23)的解为

$$\mathbf{v}=\phi\nabla\psi+\nabla\Phi, \qquad (2.1.45)$$

其中$\Phi(\mathbf{x})$可为任意函数。证毕。

由此我们得到

**定理2.3** 给定的转动场$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$确定位移场$\mathbf{u}(\mathbf{x})$（准确到任意有势向量场$\nabla\Phi$）的充要条件是

$$\nabla\boldsymbol{\omega}=0. \qquad (2.1.46)$$

**证明** 由(2.0.6)必要性是显然的。上述引理给出充分性。证毕。

可以看到，单独的无源转动场几乎不能确定位移场（还可以差任意有势向量场）。条件(2.1.1)，(2.1.4)和(2.1.46)都称为协调条件．前两者是充要的，而后者只是必要的．为了今后的需要，我们将它们改写一下．为此，将(1.3.10)，(2.0.5)代入(2.1.1)得

$$(\mathbf{e}-\epsilon\boldsymbol{\omega})\times\nabla=0 \tag{2.1.47}$$

或

$$\mathbf{e}\times\nabla-(\nabla\boldsymbol{\omega})\mathbf{I}+\nabla\otimes\boldsymbol{\omega}=0。 \tag{2.1.48}$$

由于(2.1.46)，上式变为

$$\mathbf{e}\times\nabla+\nabla\otimes\boldsymbol{\omega}=0, \tag{2.1.49}$$

或转置得到

$$\nabla\times\mathbf{e}-\boldsymbol{\omega}\otimes\nabla=0. \tag{2.1.50}$$

(2.1.49)或(2.1.50)加上(2.1.46)是和(2.1.1)等价的．求(2.1.49)的旋度又可得到(2.1.4)。

转动场 $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$一般随$\mathbf{x}$而变，为了今后需要，引进一个二阶张量场

$$\Xi\overset{\mathrm{df}}{=}\boldsymbol{\omega}\otimes\nabla, \tag{2.1.51}$$

称为弯扭张量．由定义，显然应有

$$\Xi\times\nabla=0. \tag{2.1.52}$$

将(2.1.51)代入(2.1.50)，又有

$$\Xi=\nabla\times\mathbf{e}, \tag{2.1.53}$$

或

$$\Xi^{*}=-\mathbf{e}\times\nabla. \tag{2.1.54}$$

取(2.1.54)的迹又有

$$\mathrm{tr}\,\Xi=0, \tag{2.1.55}$$

即如果$\Xi$是由$\boldsymbol{\omega}$通过(2.1.51)定义的，则(2.1.52)，(2.1.53)和(2.1.54)是$\Xi$必须满足的必要条件，分别称为$\Xi$的第一、二、三协调条件．(2.1.52)加上(2.1.53)等价于(2.1.4)；(2.1.51)加

上(2.1.53)等价于(2.1.1)；而(2.1.55)加上定义(2.1.51)又等价于(2.1.46)。

下面我们讨论给定Ξ或多给一些条件能够确定位移场或转动场到什么程度，我们有

**定理2.4** 给定的弯扭场Ξ(x)确定转动场ω(x)（准确到任意整体刚性转动$\omega^o=\omega(x)$）的充要条件是(2.1.52)。

证明同定理2.1。由此给出的转动场可表为

$$\omega(x)=\omega^o+\int_{x^o}^{x}\Xi dx. \tag{2.1.56}$$

最后，我们给出

**定理2.5** 给定的弯扭场Ξ(x)和应变场e(x)确定位移场（准确到任意整体刚性运动——平移$u^o$和转动$\omega^o$）的充要条件是在每物体点满足Ξ的三个协调条件。

**证明** 必要性是显然的。充分性的证明类似定理2.2。积分

$$\begin{aligned}\int_{x^o}^{x}\beta dx' &= \int_{x^o}^{x}(e-\epsilon\omega)dx'\\ &= \int_{x^o}^{x}(e dx'+\omega\times dx')\\ &= \int_{x^o}^{x}\{e dx'-d[\omega\times(x-x')]-(x-x')\times d\omega\}\\ &= \omega^o\times(x-x^o)+\int_{x^o}^{x}[e+(x'-x)\times\Xi]dx'\end{aligned} \tag{2.1.57}$$

与路径无关的充分条件是

$$\begin{aligned}0=[e+(x'-x)\times\Xi]\times\nabla &= e\times\nabla+\Xi^*\\ &-(\mathrm{tr}\Xi)I+(x'-x)\times(\Xi\times\nabla),\end{aligned} \tag{2.1.58}$$

而Ξ的三个协调条件保证了(2.1.58)的满足。因此

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{u}^0+\boldsymbol{\omega}^0\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)+\int_{\mathbf{x}^0}^{\mathbf{x}}[\boldsymbol{\varepsilon}+(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\times\boldsymbol{\Xi}]d\mathbf{x}'.\tag{2.1.59}$$

证明的其余部分和定理2.2类似。证毕。

## §2.2 Weingarten定理

在上面五个定理中出现关于 $\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\Xi}$ 四个量的六个协调条件，各个协调条件是相应的线积分在单连通体内与路径无关的充分条件。证明的办法是将闭回路的线积分通过 Stokes 公式变换为面积分。对单连通体，总可以在物体内找到各种各样的曲面张在这个回路上，面积分被积函数在曲面上各点等于零就是协调条件。

多连通体内并不是所有闭回路都可以收缩为一点的。例如打通洞的物体、内部有空心圆环的物体均为多连通的。但是我们可以将$N$-连通体适当地切割 $N-1$次变成单连通的。如果多连通体的线积分上下限分别取在切面的两边（应注意的是切割前是同一个点，例如$\mathbf{x}^0$，使这线积分实际上是一个闭回路积分），这个线积分的值可能（估且假设）不为零。这个差值，例如对(2.1.56)和(2.1.57)就记为

$$[\boldsymbol{\omega}]=\oint_{C^0}\boldsymbol{\Xi}d\mathbf{x}',\tag{2.2.1}$$

$$[\mathbf{u}]=\oint_{C^0}[\boldsymbol{\varepsilon}+(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\times\boldsymbol{\Xi}]d\mathbf{x}'.\tag{2.2.2}$$

如果再任取一点$\mathbf{x}^1$及相应的闭回路$C^1$，并且在切面两边用相同的曲线分别连接$\mathbf{x}^0$和$\mathbf{x}^1$点，我们就在切割成为单连通的物体内得到一个闭回路（沿$C^1$积分的方向与$C^0$相反），协调条件就相当于

$$\oint_{C^0}+\int_{\mathbf{x}^0}^{\mathbf{x}^1}+\oint_{C^1}+\int_{\mathbf{x}^1}^{\mathbf{x}^0}=0,\tag{2.2.3}$$

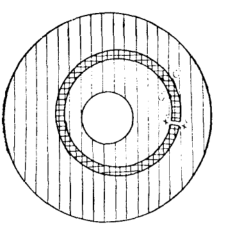


图 2-1

从而我们有

$$\oint_{C^0}=\oint_{C^1}, \qquad (2.2.4)$$

这时沿$C^0$和$C^1$积分方向相同。像$C^0$和$C^1$那样在体内可以相互变形为对方的闭回路称为等价闭回路。上面的结论就表达为

**Weingarten定理** 对多连通体内的等价闭回路$C$，下述积分是常量

$$[\boldsymbol{\omega}]=\oint_C \Xi d\mathbf{x}', \qquad (2.2.5)$$

$$[\mathbf{u}]=\oint_C [\mathbf{e}+(\mathbf{x}'-\mathbf{x}^0)\times\Xi]d\mathbf{x}', \qquad (2.2.6)$$

其中$\mathbf{x}^0$是$C$上的一个任意点。

变形为协调的多连通体在假想切面的两边的位移和转动应相等，因为实际上是同一个点的位移和转动。因此，多连通体变形协调，除了上述各种协调条件外，还应满足所谓**"周期性条件"**：

$$[\boldsymbol{\omega}]=[\mathbf{u}]=0. \qquad (2.2.7)$$

周期性条件(2.2.7)共有$N-1$对。以后我们的讨论仍只局限于单连通体。

如果记

$$\boldsymbol{\Omega}=\oint_{C}\boldsymbol{\Xi}d\mathbf{x},\tag{2.2.8}$$

$$\mathbf{b}=\oint_{C}(\mathbf{e}+\mathbf{x}\times\boldsymbol{\Xi})d\mathbf{x},\tag{2.2.9}$$

则有

$$[\boldsymbol{\omega}]=\boldsymbol{\Omega},\tag{2.2.10}$$

$$[\mathbf{u}]=\mathbf{b}-\mathbf{x}^{0}\times\boldsymbol{\Omega}=\mathbf{b}+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x}^{0}.\tag{2.2.11}$$

它们的意义将在后面讨论。

# 第三章　从协调理论到一般缺陷理论的过渡

前一章我们讨论了小变形连续统理论的各种协调条件。它们大多是有关的变形量的齐次方程，如(2.1.1)，(2.1.4)和(2.1.52)：

$$\boldsymbol{\beta}\times\nabla=0,\tag{3.0.1}$$

$$\nabla\times\mathbf{e}\times\nabla=0,\tag{3.0.2}$$

$$\Xi\times\nabla=0.\tag{3.0.3}$$

对保证变形的协调，上述各条件的满足是必要的。如果其中的某些条件不满足，即相应的变形量代入式子的左边之后不恒为零，就出现某种程度的非协调现象。在这一章里我们将不深究缺陷的几何机制，而只是笼统地从"非协调现象是由塑性变形引起的"这个概念出发，讨论在物体内某些区域连续分布的由(3.0.1)～(3.0.3)等式的左边不为零部分描述的非协调现象。由于所采用的描述非协调现象的量的不同，得到各种层次的非协调理论——缺陷理论。同时我们将假设变形由弹性部分和塑性部分组成，后者将记以"$P$"上标；总变形（记以"$T$"上标）仍然是协调的。于是

$$\boldsymbol{\beta}^T=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}^P,\tag{3.0.4}$$

$$\mathbf{e}^T=\mathbf{e}+\mathbf{e}^P,\tag{3.0.5}$$

$$\mathbf{W}^T=\mathbf{W}+\mathbf{W}^P,\ (\boldsymbol{\omega}^T=\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}^P),\tag{3.0.6}$$

$$\Xi^T=\Xi+\Xi^P.\tag{3.0.7}$$

无上标的均指弹性部分。

## §3.1 内应力理论

该理论的基本出发点是：塑性应变 $\mathbf{e}^P$ 是不协调的，即在(3.0.2)左端以 $\mathbf{e}^P$ 代入之后不恒为零。张量

$$\boldsymbol{\eta} \overset{\mathrm{df}}{=} -\nabla\times\mathbf{e}^P\times\nabla \qquad (3.1.1)$$

代表该塑性应变偏离协调的程度，称为**非协调度张量**。给定 $\mathbf{e}^P$ 意味着给定 $\boldsymbol{\eta}$。由定义(3.1.1)得到非协调度张量的**连续性方程**

$$\boldsymbol{\eta}\nabla=0, \qquad (3.1.2)$$

它说明在内应力理论里，非协调性是无源的，即不能开始或终结于塑性区域内。在给定 $\boldsymbol{\eta}$ 的情况下，由于 $\mathbf{e}^T$ 总是协调的，即满足(3.0.2)，于是得到所谓**基本几何法则**

$$\nabla\times\mathbf{e}\times\nabla=\boldsymbol{\eta}. \qquad (3.1.3)$$

这意味着，塑性应变导致弹性应变也是非协调的；在含有由塑性应变引起的缺陷的物体内，弹性应变部分保证了整体变形的协调性。在这一理论中，由于(3.1.1)，塑性位移 $\mathbf{u}^P$ 是不可积的，根本不存在塑性位移的概念。是否存在塑性转动 $\boldsymbol{\omega}^P$ 的问题并未被涉及。

线性内应力连续统静力学问题在于解平衡方程、应力应变关系和基本几何法则。许多学者如 Eshelby, Kröner, de Wit 等研究了这问题的解法。他们假定 $\mathbf{e}^P$ 不引起应力，即应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 纯粹由弹性应变 $\mathbf{e}$ 引起的。于是我们有广义虎克定律：

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{E}:\mathbf{e}=\mathbf{E}:(\mathbf{e}^T-\mathbf{e}^P). \qquad (3.1.4)$$

考虑到

$$\mathbf{e}^T=\frac{1}{2}(\mathbf{u}^T\otimes\nabla+\nabla\otimes\mathbf{u}^T), \qquad (3.1.5)$$

以及弹性张量（四阶）$\mathbf{E}$ 的对称性，又有

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{E}:\mathbf{u}^T\otimes\nabla-\mathbf{E}:\mathbf{e}^P. \qquad (3.1.6)$$

把上式代入平衡方程（f是体力）：

$$\boldsymbol{\sigma}\nabla+\mathbf{f}=0 \tag{3.1.7}$$

我们得到只包含未知总位移$\mathbf{u}^T$的偏微分方程

$$(\mathbf{E}:\mathbf{u}^T\otimes\nabla)\nabla+\mathbf{f}=(\mathbf{E}:\mathbf{e}^P)\nabla. \tag{3.1.8}$$

方程右端是由给定的塑性应变确定的已知项，可以并入已知的体力项。于是问题的求解就变成一般的弹性力学问题了。解法是众多的，例如可用 Green 张量函数法，这里就不去涉及它们了。

但是，这个最简单的非协调理论假定塑性应变应为已知，又假定它不直接引起应力。这种假设的根据并不充分。塑性应变从何而知？因此，很难说它已构成一个完整的数学理论。下面说到的另两种缺陷理论也同样有这方面的问题。

## §3.2 位 错 理 论

如果塑性应变 $\mathbf{e}^P$ 和塑性转动$\mathbf{W}^P$是同时给定的，亦即**塑性畸变**

$$\boldsymbol{\beta}^P=\mathbf{e}^P+\mathbf{W}^P \tag{3.2.1}$$

是给定的，这种缺陷称为**位错**。 把塑性畸变$\boldsymbol{\beta}^P$代入(3.0.1)的左边不恒为零，由此得到**位错密度张量**

$$\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\beta}^P\times\nabla, \tag{3.2.2}$$

它表示塑性畸变引起的非协调的程度。给定塑性畸变意味着给定位错密度的分布。由

$$\nabla\times\boldsymbol{\alpha}=-\nabla\times\mathbf{e}^P\times\nabla-\nabla\times\mathbf{W}^P\times\nabla,$$
$$(\nabla\times\boldsymbol{\alpha})^*=-\nabla\times\mathbf{e}^P\times\nabla+\nabla\times\mathbf{W}^P\times\nabla,$$

我们得到 $\boldsymbol{\alpha}$ 和单纯由 $\mathbf{e}^P$ 所确定的非协调度张量 $\boldsymbol{\eta}$的关系

$$\boldsymbol{\eta}=(\nabla\times\boldsymbol{\alpha})^S, \tag{3.2.3}$$

上标“$S$”表示该张量的对称部分。于是，给定 $\boldsymbol{\beta}^P$ 就得到 $\boldsymbol{\alpha}$，进而得到$\boldsymbol{\eta}$。由定义(3.1.1)可以求得位错密度张量应恒满足的连续性

方程

$$\alpha\nabla=0,\tag{3.2.4}$$

它表明位错也是无源的，也不能起始或终结于塑性区域内。根据总畸变 $\beta^T$ 是协调的假设，由(3.0.1)，(3.0.4)和(3.2.1)给出基本几何法则

$$\beta\times\nabla=\alpha.\tag{3.2.5}$$

或者根据(2.1.48)得

$$e\times\nabla-(\nabla\omega)I+\nabla\otimes\omega=\alpha.\tag{3.2.6}$$

上两式表明位错引起非协调的弹性畸变——非协调的弹性应变和弹性转动。

于是可以类似内应力理论那样假定$e^P$不引起应力，一样地讨论应力应变关系，并最后得到包含未知总位移 $u^T$ 的偏微分方程，这里就不再重复了。

有些作者（首先是Nye）从协调条件(2.1.50)出发引进一个等价于位错密度的Nye张量（也有人称为曲率张量，为了不和微分几何中的曲率张量相混，我们将不采用这个名称），

$$K=-\nabla\times e^P+\omega^P\otimes\nabla.\tag{3.2.7}$$

它同样刻划位错引起的塑性非协调度。显然，由

$$\begin{aligned}K\times\nabla&=-\nabla\times e^P\times\nabla+\omega^P\otimes\nabla\times\nabla\\&=-\nabla\times e^P\times\nabla=\eta,\end{aligned}\tag{3.2.8}$$

我们看到Nye张量和非协调度张量$\eta$的关系。类似于(2.1.48)位错密度张量又可写成

$$\alpha=-e^P\times\nabla+(\nabla\omega^P)I-\nabla\otimes\omega^P.\tag{3.2.9}$$

利用

$$K^*=e^P\times\nabla+\nabla\otimes\omega^P,\tag{3.2.10}$$

$$\mathrm{tr}K=\omega^P\nabla,\tag{3.2.11}$$

$$\alpha^*=\nabla\times e^P+(\nabla\omega^P)I-\omega^P\times\nabla,\tag{3.2.12}$$

和

$$\mathrm{tr}\alpha=2\omega^P\nabla, \tag{3.2.13}$$

我们得到位错密度张量 $\alpha$ 和 Ney 张量K的关系

$$\alpha=(\mathrm{tr}K)I-K^*, \tag{3.2.14}$$

$$K=\frac{1}{2}(\mathrm{tr}\alpha)I-\alpha^*. \tag{3.2.15}$$

根据总应变$e^T$和转动$\omega^T$是协调的假设，我们得到由K 表示的基本几何法则

$$\nabla\times e-\omega\otimes\nabla=K. \tag{3.2.16}$$

在内应力理论中，$\omega^P$ 的存在与否是不清楚的，更谈不上其梯度——塑性弯扭张量了。与此不同，位错理论的塑性转动$\omega^P$是给定的，从而作为已知场 $\omega^P$ 的梯度——塑性弯扭张量 $\Xi^P$ 也是已知的：

$$\Xi^P=\omega^P\otimes\nabla. \tag{3.2.17}$$

由于总变形的协调性，弹性弯扭张量也是存在的

$$\Xi=\omega\otimes\nabla. \tag{3.2.18}$$

我们可以发现，位错理论的各公式中出现的不是 $\omega^P$ 本身，而是它的梯度——弯扭张量及由梯度派生的散度。因此，各公式可以不用$\omega^P$而用$\Xi^P$表示：

$$\alpha=-e^P\times\nabla+(\mathrm{tr}\Xi^P)I-\Xi^{P*}, \tag{3.2.19}$$

$$\mathrm{tr}\alpha=2\mathrm{tr}\Xi^P, \tag{3.2.20}$$

$$K=-\nabla\times e^P+\Xi^P, \tag{3.2.21}$$

$$\mathrm{tr}K=\mathrm{tr}\Xi^P. \tag{3.2.22}$$

基本几何法则也有类似情况

$$e\times\nabla-(\mathrm{tr}\Xi)I+\Xi^*=\alpha, \tag{3.2.23}$$

$$\nabla\times e-\Xi=K. \tag{3.2.24}$$

这样，我们可以换一种说法，在位错理论里，给定的是塑性应变$e^P$和可积的（即协调的）塑性弯扭张量$\Xi^P$：

$$\Xi^P\times\nabla=0. \tag{3.2.25}$$

从这一观点看，再离开协调性更远一步，假定连塑性弯扭也是不协调的，我们就得到一个更一般的理论。

## §3.3 一般缺陷理论（向错理论）

在塑性和非协调性总是相伴而生的理解下，如果塑性应变$\mathbf{e}^P$和塑性弯扭 $\Xi^P$ 是同时给定的，我们就有位错和**向错**同时出现的**一般缺陷**。这里的出发点是塑性应变 $\mathbf{e}^P$ 和塑性弯扭 $\Xi^P$都是不协调的，即代入(3.0.2)和(3.0.3)的左端将不恒等于零。类似于位错密度张量，根据(3.2.25)我们定义**向错密度张量**

$$\theta=-\Xi^P\times\nabla. \tag{3.3.1}$$

当$\theta=0$时，缺陷退化为纯位错。因此，$\theta$ 是一个刻划偏离纯位错程度的缺陷度量。塑性弯扭的不协调是向错的根源。由定义(3.3.1)得到向错密度应恒满足的连续性条件

$$\theta\nabla=0, \tag{3.3.2}$$

即向错也是无源的，不能起始或终结于塑性区域内。位错理论和一般缺陷理论所给定的是相同的两个塑性变形量，差别在于后者的$\Xi^P$是不可积的（从而不存在 $\omega^P$）。纯位错是一种特殊的缺陷，而一般的缺陷总是包含位错成份的，可以只有纯位错，但是不存在单纯的向错。大多数作者习惯于称一般缺陷理论为向错理论，这应理解为只是一种约定的说法。由于 $\Xi^P$ 已不可积了，即一般地不存在对应的转动场$\omega^P$，位错理论中的位错密度和Nye张量的定义式 (3.2.2)和(3.2.7)在一般缺陷理论中已不合用。但由$\Xi^P$表达的各公式(3.2.19)～(3.2.24)仍然成立，其中(3.2.19)和(3.2.21)可看作是 $\alpha$ 和 $\mathbf{K}$ 在一般缺陷理论中的定义式。在 $\Xi^P$ 为可积时，它们退化为(3.2.2)和(3.2.7)。

为今后需要，我们引入 $\theta$ 的反对称部分$\theta^A$的对偶：

$$\boldsymbol{\theta}=-\frac{1}{2}\,\epsilon:\theta^{A}=-\frac{1}{2}\,\epsilon:\theta=\frac{1}{2}\,\epsilon:(\Xi^{P}\times\nabla), \qquad (3.3.3)$$

$$2\boldsymbol{\theta}=\nabla\Xi^{P}-(\mathrm{tr}\,\Xi^{P})\nabla. \qquad (3.3.4)$$

求(3.2.19)的旋度

$$\nabla\times\alpha=-\nabla\times e^{P}\times\nabla-\epsilon\nabla(\mathrm{tr}\,\Xi^{P})-\nabla\times\Xi^{P*}, \qquad (3.3.5)$$

$$(\nabla\times\alpha)^{*}=-\nabla\times e^{P}\times\nabla+\epsilon\nabla(\mathrm{tr}\,\Xi^{P})+\Xi^{P}\times\nabla, \qquad (3.3.6)$$

并利用(3.2.21)，得到

$$\eta=(\nabla\times\alpha+\theta)^{S}=K\times\nabla+\theta. \qquad (3.3.7)$$

这就是在一般缺陷的情形位错和向错对非协调度的贡献. (3.2.19)的右散度又给出

$$\alpha\nabla=(\mathrm{tr}\,\Xi^{P})\nabla-\Xi^{P*}\nabla, \qquad (3.3.8)$$

利用(3.3.4)又有

$$\alpha\nabla+2\boldsymbol{\theta}=0. \qquad (3.3.9)$$

这个 $\alpha$ 的连续性条件说明，在一般缺陷情形，位错是有源的. 这个源是向错的反对称部分. 位错在塑性区域内可以起始或终结于具有反对称部分的向错上. 换言之，向错密度为非对称的向错必然发出位错线. 将(3.2.14)代入上式，又得

$$(\mathrm{tr}K)\nabla-\nabla K+2\boldsymbol{\theta}=0, \qquad (3.3.10)$$

根据总弯扭张量是协调的，从(3.3.1)得到$\theta$的基本几何法则

$$\Xi\times\nabla=\theta. \qquad (3.3.11)$$

$\alpha$和K的基本几何法则(3.2.23)和(3.2.24)仍然有效. 于是，同样可类似于内应力理论那样通过平衡方程、应力应变关系和基本几何法则求解.

在这一章里我们所得到的三个缺陷理论是从经典线性连续统理论逐步离开协调性和相应地引进连续分布缺陷而得到的逐步一般化的理论. 我们并没有讨论这些缺陷的机制以及几乎在所有位错问题的文献里均出现的 Burgers 向量和 Frank 向量.

在一般缺陷的情形，对于弹性应变 e 和弯扭Ξ，公式(2.2.8)

和(2.2.9)所定义的两个向量称为 Frank 向量和 Burgers 向量:

$$\boldsymbol{\Omega}=\oint_C \boldsymbol{\Xi} d\mathbf{x}, \tag{3.3.12}$$

$$\mathbf{b}=\oint_C (\mathbf{e}+\mathbf{x}\times\boldsymbol{\Xi})\, d\mathbf{x}. \tag{3.3.13}$$

前者仅在向错理论中出现,后者则出现在位错理论中。应用Stokes公式以及(3.3.11)得到

$$\boldsymbol{\Omega}=-\int_S (\boldsymbol{\Xi}\times\nabla) dS=-\int_S \boldsymbol{\theta} dS, \tag{3.3.14}$$

它表明Frank向量是由θ描述的。粗糙地说,是通过该曲面的θ向错线的总和。同样地

$$\begin{aligned}\mathbf{b}&=-\int_S (\mathbf{e}+\mathbf{x}\times\boldsymbol{\Xi})\times\nabla dS\\ &=-\int_S [\mathbf{e}\times\nabla-(\mathrm{tr}\boldsymbol{\Xi})\mathbf{I}+\boldsymbol{\Xi}^*+\mathbf{x}\times(\boldsymbol{\Xi}\times\nabla)]dS\\ &=-\int_S (\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{x}\times\boldsymbol{\theta})dS.\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

当θ=0即退化为位错理论时

$$\mathbf{b}=-\int_S \boldsymbol{\alpha} dS. \tag{3.3.16}$$

此时,Burgers向量也表示通过该曲面的位错线的总和.这两个向量的物理意义将在后面的孤立缺陷理论中进一步讨论。

## §3.4 例 子

为了形象地说明在本章引进的塑性畸变、非协调度张量、位错密度张量、塑性弯扭张量、Nye张量和向错密度张量的含义,我们在这一节里将讨论两个简单的例子。为简单起见,我们只讨论二维的情况,且用带晶格的图形来显示出结果。当然,仅当单位晶格长度相对于物体的尺寸是充分小时,连续统理论才适用于晶体。然而图形直观对领会上面讨论的抽象概念是有帮助的。

在二维的情况下，一般关系有较简单的形式。由(2.0.2)式，总畸变张量的不为零的分量为

$$\left.\begin{aligned}\beta_{11}^{T}=\partial_1 u_1^T,\quad \beta_{12}^{T}=\partial_2 u_1^T,\\ \beta_{21}^{T}=\partial_1 u_2^T,\quad \beta_{22}^{T}=\partial_2 u_2^T.\end{aligned}\right\}\tag{3.4.1}$$

由(2.0.3)式总应变张量的不为零的分量为

$$\left.\begin{aligned}e_{11}^{T}=\beta_{11}^{T},\quad e_{22}^{T}=\beta_{22}^{T},\\ e_{12}^{T}=e_{21}^{T}=\frac{1}{2}(\beta_{12}^{T}+\beta_{21}^{T}).\end{aligned}\right\}\tag{3.4.2}$$

由(2.0.6)式知总转动向量

$$\omega_i^T=-\frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\beta_{kl}^T\tag{3.4.3}$$

的唯一不为零的分量为

$$\omega_3^T=\frac{1}{2}(\beta_{21}^T-\beta_{12}^T).\tag{3.4.4}$$

从(2.2.51)，总弯扭张量不为零的分量有

$$\Xi_{31}^T=\partial_1\omega_3^T,\quad \Xi_{32}^T=\partial_2\omega_3^T.\tag{3.4.5}$$

上述关系全来自总位移向量$u_k^T$。如果弹性或塑性位移存在，则相应的关系也成立。

由(3.2.1)式位错密度张量不为零的分量有

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{13}=-\beta_{11,2}^{P}+\beta_{12,1}^{P},\\ \alpha_{23}=-\beta_{21,2}^{P}+\beta_{22,1}^{P}.\end{aligned}\right\}\tag{3.4.6}$$

由(3.3.1)或(3.3.11)，向错密度张量唯一不为零的分量为

$$\theta_{33}=\partial_2\Xi_{31}-\partial_1\Xi_{32}=-\partial_2\Xi_{31}^P+\partial_1\Xi_{32}^P.\tag{3.4.7}$$

由(3.2.15)，(3.2.16)和(3.2.21)知Nye张量不为零的分量是

$$\left.\begin{aligned}K_{31}=-\alpha_{13}=\partial_2 e^p_{11}-\partial_1 e^p_{12}+\Xi^p_{31}=-\partial_2 e_{11}+\partial_1 e_{12}-\Xi_{31},\\K_{32}=-\alpha_{23}=\partial_2 e^p_{21}-\partial_1 e^p_{22}+\Xi^p_{32}=-\partial_2 e_{21}+\partial_1 e_{22}-\Xi_{32}.\end{aligned}\right\}$$

(3.4.8)

而(3.1.1)给出非协调度张量唯一不为零的分量

$$\eta_{33}=e^p_{11,22}+e^p_{22,11}-2e^p_{12,12},\qquad(3.4.9)$$

它与 Nye 张量或位错密度张量以及向错密度张量的关系式(3.3.7)变成

$$\eta_{33}=\theta_{33}+K_{31,2}-K_{32,1}=\theta_{33}+\alpha_{23,1}-\alpha_{13,2}.\qquad(3.4.10)$$

为简化起见，设应力满足无体力的平衡方程

$$\sigma_{ij,j}=0,\qquad(3.4.11)$$

且应力和弹性应变满足各向同性广义虎克定律

$$\sigma_{ij}=2G\left(e_{ij}+\frac{\nu}{1-2\nu}e_{kk}\delta_{ij}\right),\qquad(3.4.12)$$

这里$G$是剪切模量，$\nu$是泊松比。

例1 具有常位错密度($\alpha=$const.)的简单弯曲。

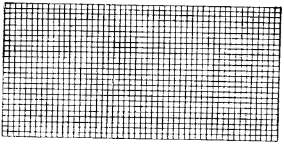
图3-1(a)是未变形的晶体，(b)～(c)是弯曲了的晶体。总变形是相似的，分析表达式同情况 A。图(b) 表示纯弹性变形的情况B，图(c)则表示常位错密度的弹塑性变形的情况 C。除情况 B 外，其它情况中弹性应变均为零。

情况A：简单弯曲的总变形

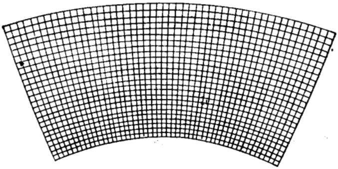
总位移是

$$\left.\begin{aligned}u^T_1&=-Ax_1x_2,\\u^T_2&=\frac{1}{2}Ax_1^2+\frac{1}{2}Bx_2^2,\end{aligned}\right\}\qquad(3.4.13)$$

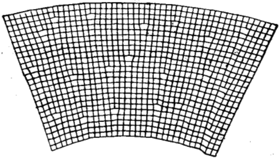
这里$A$、$B$ 是常数。代入(3.4.1)，(3.4.2)，(3.4.4)和(3.4.5)得不为零的总体场量（畸变、应变、转动和弯扭等）为



(a) 未变形的晶体



(b) 纯弹性变形的晶体



(c) 具有常位错密度的弹塑性变形的晶体

图 3-1

$$\left.\begin{array}{l}\beta_{11}^{T}=-Ax_2,\ \beta_{21}^{T}=Ax_1,\\ \beta_{12}^{T}=-Ax_1,\ \beta_{22}^{T}=Bx_2,\\ e_{11}^{T}=-Ax_2,\ \omega_3^{T}=Ax_1,\\ e_{22}^{T}=Bx_2,\quad \Xi_{31}^{T}=A.\end{array}\right\}\tag{3.4.14}$$

我们注意到常数$A$恰好是唯一不为零的总弯扭分量 $\Xi^T_{31}$。总应变有时也称形状改变，因它仅向我们显示了物体形状已经如何变化，而没有告诉我们内部发生的任何事情。

情况B：纯弹性变形

弹性位移为

$$\left.\begin{aligned}&u_1=-Ax_1x_2,\\&u_2=\frac{1}{2}Ax_1^2+\frac{1}{2}A\frac{\nu}{1-\nu}x_2^2,\end{aligned}\right\}\tag{3.4.15}$$

这里$A$是常数，后一项中已引进$\nu$以满足平衡方程(3.4.11)。类似地可得到不为零的弹性场量为

$$\left.\begin{aligned}&\beta_{11}=-Ax_2,\quad &&\beta_{21}=Ax_1,\\&\beta_{12}=-Ax_1,\quad &&\beta_{22}=\frac{\nu}{1-\nu}Ax_2,\\&e_{11}=-Ax_2,\quad &&\omega_3=Ax_1,\\&e_{22}=\frac{\nu}{1-\nu}Ax_2,\quad &&\Xi_{31}=A.\end{aligned}\right\}\tag{3.4.16}$$

这里无塑性变形，故无位错等缺陷。事实上由(3.4.8)得

$$\alpha_{13}=\alpha_{23}=0.\tag{3.4.17}$$

因此，总变形仍由(3.4.13)、(3.4.14)表示，但$B=(\nu/(1-\nu))A$。注意到现在$A$更特殊地表示绕$x_3$轴沿$x_1$方向的弹性弯扭$\Xi_{31}$，从图(b)还看到，它还表示了晶格的曲率。

情况C：常位错密度的弹塑性变形

下面考虑具有常位错密度但无弹性变形的简单弯曲。在晶体内位错当然是离散的，以致塑性变形集中在位错核内，而在它们之间的物质发生弹性变形（如图 3-1(c) 所示）。然而，在采用连续统理论处理这类问题时，我们应想象为晶格常数趋于零而位错密度在整个晶体内变得连续分布的理想情况，从而完全消去弹性应变。

这时不再有弹性或塑性位移，但总位移和总体场量仍由(3.4.13)和(3.4.14)给出。如果任意地给出塑性弯扭，那么弹性场可由总体场量给出如下（只列出不为零的量）：

$$
\left.\begin{array}{ll}
\beta_{21}=Ax_1, & \beta_{11}^P=-Ax_2, \\
\beta_{12}=-Ax_1, & \beta_{22}^P=Bx_2, \\
\omega_3=Ax_1, & e_{11}^P=-Ax_2, \\
\Xi_{31}=A, & e_{22}^P=Bx_2.
\end{array}\right\} \tag{3.4.18}
$$

弹塑性场相加正好得到总体场(3.4.14)。从(3.4.8)式位错密度张量和Nye张量的唯一的不为零的分量是

$$
\alpha_{13}=-K_{31}=A. \tag{3.4.19}
$$

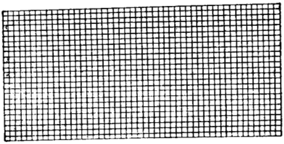
图3-1(c)显示晶格曲率再次由弹性弯扭的$A$值给出。它和图(b)中纯弹性弯曲时的情况是一样的。在本情况，该值恰好还与位错密度分量$\alpha_{13}$相同。然而这只是一种偶合。例如，如果我们再进一步弹性地稍为弯曲一下晶体，那么晶格曲率和弹性弯扭将增加，即$A$值将增加，但位错密度分量$\alpha_{13}$不变。在本情况中位错密度等于弹性弯扭是因为无弹性变形的缘故。

**例2** 具有常向错密度的变形

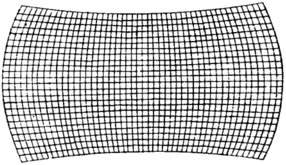
图3-2显示比图3-1更复杂的具有常向错密度的变形情况。同样地，我们采用的缺陷连续统理论应是晶格常数趋于零而向错密度在整个晶体内变得连续分布的理想情况，只是为了图象直观清楚，我们把晶格放大，并把缺陷也画成是离散的。

情况A：总变形。总位移是

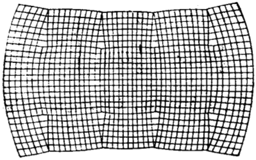
$$
\left.\begin{array}{l}
u_1^T=\frac{1}{2}Ax_1x_2^2-\frac{1}{2}Cx_1^3, \\
u_2^T=\frac{1}{2}Bx_1^2x_2-\frac{1}{2}Dx_2^3,
\end{array}\right\} \tag{3.4.20}
$$



(a) 未变形的晶体



(b) 纯弹性变形的晶体



(c) 具有常向错密度的变形的晶体

图 3-2

这里$A$、$B$、$C$和$D$是常数．从(3.4.1)～(3.4.5)，非零的总体场量为：

$$
\left.\begin{aligned}
&\beta^T_{11}=\frac{1}{2}Ax_2^2-\frac{3}{2}Cx_1^2, && \beta^T_{21}=Bx_1x_2,\\
&\beta^T_{12}=Ax_1x_2, && \beta^T_{22}=\frac{1}{2}Bx_1^2-\frac{3}{2}Dx_2^2,\\
&e^T_{11}=\frac{1}{2}Ax_2^2-\frac{3}{2}Cx_1^2, && \omega^T_3=-\frac{1}{2}(A-B)x_1x_2,\\
&e^T_{22}=\frac{1}{2}Bx_1^2-\frac{3}{2}Dx_2^2, && \Xi^T_{31}=-\frac{1}{2}(A-B)x_2,\\
&e^T_{12}=\frac{1}{2}(A+B)x_1x_2, && \Xi^T_{32}=-\frac{1}{2}(A-B)x_1.
\end{aligned}\right\}
\tag{3.4.21}
$$

我们注意到总弯扭$\Xi^T_{31}$和$\Xi^T_{32}$现在是位置的线性函数。总应变再次表达了形状的改变。

情况B：纯弹性变形(图3-2(b))。

弹性变形可表述为

$$
\left.\begin{aligned}
u_1&=\frac{1}{2}Ax_1x_2^2-\frac{1}{2}Cx_1^3,\\
u_2&=\frac{1}{2}Bx_1^2x_2-\frac{1}{2}Dx_2^3,
\end{aligned}\right\}
\tag{3.4.22}
$$

这里$A$和$B$是与弯曲有关的常数，$C$和$D$应取如下数值以满足平衡方程(3.4.11)：

$$
\left.\begin{aligned}
C&=\frac{1}{6(1-\nu)}[(1-2\nu)A+B],\\
D&=\frac{1}{6(1-\nu)}[A+(1-2\nu)B].
\end{aligned}\right\}
\tag{3.4.23}
$$

从(3.4.1)～(3.4.5)我们可类似地得到不为零的弹性场量为

$$
\left.\begin{aligned}
&\beta_{11}=\frac{1}{2}Ax_2^2-\frac{3}{2}Cx_1^2, &&\beta_{21}=Bx_1x_2,\\
&\beta_{12}=Ax_1x_2, &&\beta_{22}=\frac{1}{2}Bx_1^2-\frac{3}{2}Dx_2^2,\\
&e_{11}=\frac{1}{2}Ax_2^2-\frac{3}{2}Cx_1^2, &&\omega_3=-\frac{1}{2}(A-B)x_1x_2,\\
&e_{22}=\frac{1}{2}Bx_1^2-\frac{3}{2}Dx_2^2, &&\Xi_{31}=-\frac{1}{2}(A-B)x_2,\\
&e_{12}=\frac{1}{2}(A+B)x_1x_2, &&\Xi_{32}=-\frac{1}{2}(A-B)x_1.
\end{aligned}\right\}
\tag{3.4.24}
$$

与(3.4.21)式不同，这里$C$和$D$应满足(3.4.23)式。本情况中无塑性变形，也无缺陷。这从图 3-2(b) 看是明显的。事实上，由(3.4.6)和(3.4.7)有

$$\theta_{33}=0, \tag{3.4.25}$$

$$\alpha_{13}=\alpha_{23}=0. \tag{3.4.26}$$

总变形也是由(3.4.24)表示。晶格曲率再次由弹性弯扭$\Xi_{31}$和$\Xi_{32}$描述。

情况C：具有常向错密度的变形（图3-2(c)）。

在实际物体中向错在晶体内是离散地分布的。塑性变形集中在核内，如图3-2(c)所示。为了应用连续统理论，我们应想象晶格常数趋于零且向错密度在整个晶体内变得连续。图中我们已选转动向量为$\pi/5$ 的向错而不是完全的 $\pi/2$ 的向错，因为为了使线性理论适用，完全向错对应的应变是太大了。

这里不再存在弹性和塑性位移。但总变形仍有（3.4.20）和(3.4.21)的表达式。我们注意到给出塑性场量之后，弹性场量可由总变形给出。它们的不为零分量是：

$$
\left.\begin{aligned}
&e_{11}=-\frac{3}{2}Cx_1^2, && e^P_{11}=\frac{1}{2}Ax_2^2,\\
&e_{22}=-\frac{3}{2}Dx_2^2, && e^P_{22}=\frac{1}{2}Bx_1^2,\\
&e_{12}=\frac{1}{2}(A+B)x_1x_2, && \Xi^P_{31}=-Ax_2,\\
&\Xi_{31}=\frac{1}{2}(A+B)x_2, && \Xi^P_{32}=Bx_1,\\
&\Xi_{32}=-\frac{1}{2}(A+B)x_1.
\end{aligned}\right\}\tag{3.4.27}
$$

为满足平衡方程(3.4.11)，$C$和$D$应满足

$$C=D=\frac{1-2\nu}{6(1-\nu)}(A+B).\tag{3.4.28}$$

从(3.4.7)得到向错密度张量的不为零的分量为

$$\theta_{33}=A+B.\tag{3.4.29}$$

而从(3.4.8)知位错密度为零：

$$\alpha_{31}=\alpha_{32}=0.\tag{3.4.30}$$

由此，我们在这里介绍了一种具有常向错密度而无位错的弹塑性变形。要求弹性应变为零是不可能的，这反映了从(3.4.10)、(3.4.29)和(3.4.30)，存在不为零的非协调度张量的分量

$$\eta_{33}=A+B\tag{3.4.31}$$

这个事实，它是弹性应变的来源。这一关系式与(3.4.9)相符.注意到晶格曲率现在还受向错影响，不再与情况B中纯弹性变形一样了。

情况D：等价位错密度。

在这里我们指出可以存在一等价的位错密度，它在晶体内等价地给出和有常向错密度的情况C同样的弹性应变。这时弹性和塑性畸变如下：

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{11}=-\frac{3}{2}Cx_1^2, &&\beta^P_{11}=\frac{1}{2}Ax_2^2,\\ &\beta_{12}=(A-E)x_1x_2, &&\beta^P_{12}=Ex_1x_2,\\ &\beta_{21}=(B+E)x_1x_2, &&\beta^P_{21}=-Ex_1x_2,\\ &\beta_{22}=-\frac{3}{2}Dx_2^2, &&\beta^P_{22}=\frac{1}{2}Bx_1^2, \end{aligned}\right\} \tag{3.4.32}$$

这里$E$是为了用位错密度替代向错密度引进的新的常数。注意到弹性和塑性畸变相加仍得到(3.4.21)表示的总畸变。但是为了满足平衡方程(3.4.11)，$C$和$D$应由(3.4.28)式给出。相应的应变和弯扭是:

$$\left.\begin{aligned} &e_{11}=-\frac{3}{2}Cx_1^2, &&e^P_{11}=\frac{1}{2}Ax_2^2,\\ &e_{22}=-\frac{3}{2}Dx_2^2, &&e^P_{22}=\frac{1}{2}Bx_1^2,\\ &e_{12}=\frac{1}{2}(A+B)x_1x_2, &&e^P_{12}=0,\\ &\omega_3=\frac{1}{2}(2E-A+B)x_1x_2, &&\omega^P_3=-Ex_1x_2,\\ &\Xi_{31}=\frac{1}{3}(2E+B-A)x_2, &&\Xi^P_{31}=-Ex_2,\\ &\Xi_{32}=\frac{1}{2}(2E-A+B)x_1, &&\Xi^P_{32}=-Ex_1. \end{aligned}\right\} \tag{3.4.33}$$

当然，向错密度(3.4.7)变为零

$$\theta_{33}=0. \tag{3.4.34}$$

而位错密度(3.4.6)变为

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{13}=-(A-E)x_2,\\ &\alpha_{23}=(B+E)x_1. \end{aligned}\right\} \tag{3.4.35}$$

因为我们有和情况C完全相同的应变，我们应有相同的非协调度

张量

$$\eta_{33}=A+B. \tag{3.4.36}$$

把(3.4.34)、(3.4.35)和(3.4.36)代入(3.4.10)式是不会产生矛盾的。

可以看到，为了用位错密度替代向错密度之后产生同样的弹性应变，位错密度的选择(3.4.35)式有无穷多种可能性。然而，没有一种这样的位错能产生和情况C同样的晶格曲率$\Xi_{31}$和$\Xi_{32}$。如果在(3.4.35)式中取$E=A$，那么$\Xi_{31}$在情况C和D是一样的，且位错密度仅有一个不为零的分量$\alpha_{23}$。如果取$E=-B$，那么$\Xi_{32}$在这两种情况中是一样的，且位错密度仅有一个不为零的分量$\alpha_{13}$。最后，如果取$E=0$，晶格曲率和纯弹性变形的情况B一样，但位错密度有两个不为零的分量$\alpha_{13}$和$\alpha_{23}$。从情况C的场量中扣除情况D的对应的场量我们可以得到一种位错分布，它完全消去了向错分布带来的弹性应变。

本节给出的两个简单的例子只是为了有助于我们形象地领会本章提出的一般缺陷理论中的抽象概念。为了后面讨论孤立缺陷的连续统理论，下一章我们先扼要介绍一下$\delta$-函数及其推广。

# 第四章　δ-函数及其推广

## §4.1　广 义 函 数

为了表达古典分析的点函数无能为力的集中力、集中质量等物理概念的需要，广义函数的概念被引进来了。一说到广义函数，人们就会想到$\delta$-函数，对力学工作者来说，更想到集中力的问题。因此，我们首先就这个问题的梁的弯曲为例，说明引进$\delta$-函数的方便。我们考虑自由端简支的悬臂梁的弯曲问题。设梁上的分布载荷为$q(x)$，$0<x<l$。由弹性力学知，梁的挠度方程是

$$EJw^{(\mathrm{IV})}=q(x),\qquad 0<x<l. \tag{4.1.1}$$

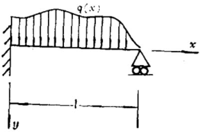



图 4-1

加上两端的四个边界条件，这里是

$$\left.\begin{array}{l} w(0)=0,\ w'(0)=0, \\ w(l)=0,\ w''(l)=0 \end{array}\right\} \tag{4.1.2}$$

构成该问题的完整数学提法。在给定的边界条件下求解出挠度$w$，我们就可以由下公式求出每一截面的弯矩$M$和剪力$Q$：

$$M=-EJw'', \tag{4.1.3}$$

$$Q=-EJw'''. \tag{4.1.4}$$

当载荷是集中力时情况变得更复杂。在不知道$\delta$-函数之前，人们一般有两种办法：其一是化成从$x_0-\varepsilon$到$x_0+\varepsilon$的一段上作用着均匀载荷的问题。载荷的密度为$q=$常数，满足

$$2q\varepsilon = P. \tag{4.1.5}$$

当 $\varepsilon$ 越小，就越接近集中力的情形。其实，实际上也不存在理想的集中力，因为在一个数学上的点上作用那么大的力是不可能的。这时$q(x)$的表达式是分段函数

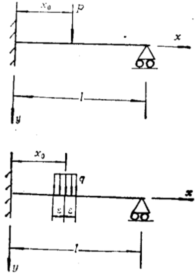



图 4-2

$$q(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < x_0 - \varepsilon, \\ q, & x_0 - \varepsilon \leqslant x \leqslant x_0 + \varepsilon, \\ 0, & x_0 + \varepsilon < x < l. \end{cases} \tag{4.1.6}$$

因而方程在这三段上呈现不同的形式

$$\left.\begin{aligned} &EJw^{(\mathrm{IV})} = 0, \quad 0 < x < x_0 - \varepsilon, \\ &EJw^{(\mathrm{IV})} = q, \quad x_0 - \varepsilon \leqslant x \leqslant x_0 + \varepsilon, \\ &EJw^{(\mathrm{IV})} = 0, \quad x_0 + \varepsilon < x < l. \end{aligned}\right\} \tag{4.1.7}$$

边条件也由原来的两端共四个边条件变为在 $x_0 - \varepsilon$ 点还要加上四个连接条件

$$\left.\begin{aligned} &w(x_0 - \varepsilon - 0) = w(x_0 - \varepsilon + 0), \\ &w'(x_0 - \varepsilon - 0) = w'(x_0 - \varepsilon + 0), \\ &w''(x_0 - \varepsilon - 0) = w''(x_0 - \varepsilon + 0), \\ &w'''(x_0 - \varepsilon - 0) = w'''(x_0 - \varepsilon + 0). \end{aligned}\right\} \tag{4.1.8}$$

在$x_0+\varepsilon$处也有四个连接条件。这样一共有12个条件，用来确定分段定义的函数$w$的12个常数。这种处理方法是不大方便的。第二种办法回到集中力的情况，将梁只分成两段，在$x=x_0$处由于集中力的作用$w'''$不连续。方程可以写成

$$\left.\begin{aligned}&EJw_1^{(N)}=0, \quad 0<x<x_0,\\&EJw_2^{(N)}=0, \quad x_0<x<l,\end{aligned}\right\}\tag{4.1.9}$$

在$x=x_0$处有四个连接条件

$$\left.\begin{aligned}&w_1=w_2,\ w_1'=w_2',\ w_1''=w_2''\\ \text{和}\qquad &\\&EJ(w_2'''-w_1''')=P,\end{aligned}\right\}\tag{4.1.10}$$

后一个条件是对在$x=x_0$附近的微元沿$y$方向列力的平衡方程

$$-Q(x_0+\varepsilon)+Q(x_0-\varepsilon)=P,\tag{4.1.11}$$

再令$\varepsilon\to 0$，取极限得到的。这样的集中力方案也要解8个方程的代数方程组来定8个常数。

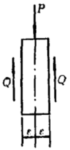


图 4-3

最方便的仍然是只用一个函数$q(x)$来表示集中力。显然，这时已不能用古典的“每点对应于一个函数值”的函数概念去表达了。但是从上面的例子我们看到，用$2q\varepsilon=P$代替集中力时，当$\varepsilon$越小，这种代替就越接近集中力；当$\varepsilon\to 0$，$q\to\infty$。这时假如仍用$q(x)$来代表的话，则粗糙地可表为

$$q(x)=\begin{cases}0, & 0<x<x_0,\\ \infty, & x=x_0,\\ 0, & x_0<x<l.\end{cases}\tag{4.1.12}$$

可是上述写法有两个问题：首先它已不是我们通常所理解的函数了；第二，它和$P$如何建立起联系？后一矛盾可以这样解决，我们假定当$P=1$时上述表达式成立，且记为

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}0, & 0<x<x_0,\\ \infty, & x=x_0,\\ 0, & x_0<x<l.\end{cases} \tag{4.1.13}$$

则当集中力为$P$时，我们有$q(x)=P\delta(x-x_0)$，这就是$\delta$-函数。但是上述的说法是不确切的。如何进行运算？能否求导？也产生一系列问题。为了解决这些问题，我们下面将给予广义函数一个比较确切的定义，并粗略地叙述以后会用到的广义函数的一些性质。为此，先作一些准备工作。我们将在实值$n$维欧氏空间$R^n$讨论问题。记$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为$x\in R^n$。设$\phi(x)$为我们通常理解的$n$元函数。

**定义4.1** 连续函数$\phi(x)$称为**支集有界函数**，如果它在某有界区域$D$之外全为零。而$\phi(x)\neq 0$的全体点的闭包称为$\phi(x)$的**支集**，记为 $\mathrm{supp}\,\phi(x)$。

**定义4.2** 无穷次可微的支集有界函数$\phi(x)$称为**基本函数**。

显然，基本函数的线性组合仍然是基本函数，因此有

**定义4.3** 基本函数的全体构成一个线性空间，称为**基本空间**，记作$K$或$C_0^\infty$。

**定义4.4** **基本函数序列** $\phi_1(x)$，$\phi_2(x)$，…在$K$趋于零，记作 $\phi_\nu(x)\xrightarrow[\nu\to\infty]{K}0$，如果

（1） 各$\phi_\nu(x)$有相同的支集，

（2） 各$\phi_\nu(x)$，$\phi'_\nu(x)$，$\phi''_\nu(x)$，…，$\phi_\nu^{(n)}(x)$，…（所有各阶的导数）都一致地趋于零，也就是说，对$\forall\varepsilon>0$，存在$N$（与$x$无关），使得当$\nu>N$时对一切$n$成立

$$|\phi_\nu^{(n)}(x)|<\varepsilon.$$

**例1**

$$\phi(x,a)=\begin{cases}\exp[-a^2/(a^2-r^2)], & r<a,\quad r=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2},\\ 0, & r\geqslant a.\end{cases} \tag{4.1.14}$$

支集是以 $a$ 为半径的球，因此它是一个支集有界函数．由于 $e^x$ 的良好性质，它是无穷次可微的，因此这是一个基本函数．可以验证

$$\phi_\nu(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\nu}\phi(x, a) \xrightarrow[\nu\to\infty]{K} 0.$$

**定义4.5** $K$ 中的一个**线性连续泛函**（简称泛函）$f:K\to R$ 是指这样一个对应规律，它使每个 $\phi(x)\in K$ 都有一个实数与之相对应，记这个实数为 $(f,\phi)$，并且满足

（1） 线性：$(f,\alpha\phi+\beta\psi)=\alpha(f,\phi)+\beta(f,\psi)$，$\forall\alpha,\ \beta\in R$，$\phi,\psi\in K$，

（2） 连续性：$\phi_\nu(x)\xrightarrow[\nu\to\infty]{K}0 \Rightarrow (f,\phi_\nu)\xrightarrow[\nu\to\infty]{}0$.

例如，设 $f(x)$ 是一个普通的局部可积函数（在有限区域内按 Riemann 意义或 Lebesgue 意义可积），则对 $\forall\phi(x)\in K$，因 $\phi(x)$ 是支集有界且无穷次可微的，实数（积分值）

$$\int_{R^n} f(x)\phi(x)\,dx$$

总是存在的，也就是说用函数 $f(x)$ 通过上述积分我们可以在 $K$ 上定义一个泛函 $f$

$$(f,\phi) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_{R^n} f(x)\phi(x)\,dx. \tag{4.1.15}$$

显然，$f$ 是线性的，即

$$\begin{aligned}(f,\alpha\phi+\beta\psi) &= \int_{R^n} f(x)[\alpha\phi(x)+\beta\psi(x)]dx \\ &= \alpha\int_{R^n} f(x)\phi(x)dx+\beta\int_{R^n} f(x)\psi(x)dx \\ &= \alpha(f,\phi)+\beta(f,\psi).\end{aligned}$$

至于连续性我们可以证明如下：

设 $\phi_\nu(x)\xrightarrow[\nu\to\infty]{K}0$，即 $\forall\varepsilon_1>0$，$\exists N$ 使得当 $\nu>N$ 时对一切 $n$

有

$$|\phi_\nu^{(n)}(x)|<\varepsilon_1.$$

记

$$D=\operatorname{supp}\phi_\nu(x),$$

则

$$\int_{R^n}f(x)\phi_\nu(x)dx=\int_D f(x)\phi_\nu(x)dx,$$

于是对 $\forall\varepsilon>0$，我们只要对 $\varepsilon_1=\varepsilon/M$ 选定 $N$，其中

$$M=\max\left(1,\int_D|f(x)|dx\right),$$

这时就有估计

$$\begin{aligned}\left|\int_{R^n}f(x)\phi_\nu(x)dx\right|&=\left|\int_D f(x)\phi_\nu(x)dx\right|\\&\leqslant\int_D|f(x)||\phi_\nu(x)|dx\\&\overset{\nu>N}{\leqslant}\varepsilon_1\int_D|f(x)|dx\leqslant\varepsilon_1 M=\varepsilon,\end{aligned}$$

这意味着 $(f,\phi_\nu)\xrightarrow[\nu\to\infty]{}0$.

由此可见，任何一个局部可积函数 $f(x)$ 都定义了一个线性连续泛函 $f$，也就是说给出这样一个对应规律：

$\phi_1(x)\in K\longrightarrow$数 $\int_{R^n}f(x)\phi_1(x)dx$ 亦即数 $(f,\phi_1)$，

$\phi_2(x)\in K\longrightarrow$数 $(f,\phi_2)$，

……

$\phi_\nu(x)\in K\longrightarrow$数 $(f,\phi_\nu)$，

……

这样一种无穷多个数按次序地对应于无穷多个基本函数的对应规律就是我们的线性泛函。上述泛函是由一个可积函数 $f(x)$ 来定义的：

$$\text{基本函数 } \phi \xrightarrow{f(x)} \text{数 } (f,\phi).$$

换言之，函数$f(x)$建立了基本函数空间到实数轴的对应关系。反过来，在相当多的情况下，基本函数空间到实数轴的对应关系即泛函就代表了一个局部可积函数。在这种情况下，我们可以把泛函$f$和局部可积函数$f(x)$等同起来（准确到零测度集）。

然而，每一个泛函，即给定的基本函数空间到实数轴的对应关系，并不一定都有一个局部可积函数与之对应。下面的例子就证实了这一点。

**例 2** 建立从基本函数空间到实数轴的一个对应关系为

$$(f,\phi)=\phi(0), \quad \forall \phi(x)\in K. \tag{4.1.16}$$

下面证明不存在局部可积函数$f(x)$使得

$$\int_{R^n} f(x)\phi(x)dx=\phi(0). \tag{4.1.17}$$

因为若不然，取例1中的$\phi(x,a)$作为一个基本函数序列（例如取$a=1/\nu$），按照（4.1.17）将有

$$\int_{R^n} f(x)\phi(x,a)dx=\phi(0,a)=e^{-1}, \tag{4.1.18}$$

这是对任何$a$都成立的，当然对$a\to 0$也成立。但是另一方面，由于$\phi(x,a)$的绝对连续性

$$\lim_{a\to 0}\int_{R^n} f(x)\phi(x,a)dx=\int_{R^n}\lim_{a\to 0} f(x)\phi(x,a)dx=0\neq e^{-1}, \tag{4.1.19}$$

这产生矛盾。因而不可能存在局部可积的$f(x)$对应于$(f,\phi)=\phi(0)$。我们称由(4.1.16)表述的线性连续泛函为**δ-函数**，也记为$\delta(x)$。当然它已不是古典意义下的函数。以后我们也形式地记

$$(\delta,\phi)=\int_{R^n}\delta(x)\phi(x)dx=\phi(0), \tag{4.1.20}$$

或等价地记

$$\int_{R^n}\delta(x-x')\phi(x)dx=\phi(x'). \qquad (4.1.21)$$

这样，我们就可认为任何一组基本函数空间到实数轴的对应关系，即任何一个泛函都和一个广义的“函数”等价，而有

**定义4.6** 基本函数空间上的线性连续泛函称为**广义函数**.如果该泛函可以与普通的局部可积点函数相对应，则称为**正则广义函数**，否则称为**奇异广义函数**.

例 3 由$(f,\phi)=c\int_{R^n}\phi(x)dx=\int_{R^n}c\phi(x)dx$所定义的正则广义函数称为常数$c$.

应该注意广义函数只是一种对应关系$f:K\to R$. 即使是正则广义函数，它所代表的已不是一个普通的函数，而是一个集合. 集合中的函数可以彼此间在一个零测度集上有不同的值，例如下面的函数

$$c(x)=\begin{cases} c+1, & x=0 \\ c, & x\neq 0 \end{cases}$$

也是和例3中的广义函数“常数$c$”相对应的局部可积点函数. 因此，谈论广义函数在某点上的值，写成$f(x_0)$是没有意义的.当然如同前面那样写成

$$\delta(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \infty, & x=0, \\ 0, & x>0. \end{cases}$$

也是没有意义的. 符号$\delta(x)$本身也应理解成只是约定的一种形式写法而已.

## §4.2 广义函数的运算

对广义函数可以定义下面几种运算

(1)数乘 由于泛函是线性的，可定义$af$为

$$(\alpha f,\phi)\overset{\text{df}}{=}(f,\alpha\phi),\qquad \forall\phi\in K,\ \alpha\in R. \tag{4.2.1}$$

（2）加法　同样由于泛函是线性的，可以定义两个广义函数$f$、$g$的和$f+g$为：

$$(f+g,\phi)\overset{\text{df}}{=}(f,\phi)+(g,\phi),\qquad \forall\phi\in K \tag{4.2.2}$$

（3）相等　上面已经指出谈论广义函数在某点上的值是没有意义的。但是说"$f$在点$x$的邻域$U$为零"却是有意义的，它是指对以$U$为支集的任意$\phi(x)\in K$都有$(f,\phi)=0$。

如果$f$在开区域$G$中的每一点的某个邻域等于零，我们就说$f$在$G$内等于零。例如$\delta(x)$在除原点外的开域均等于零。

如果$f-g$在区域$G$等于零，我们就说$f$和$g$在$G$相等。

（4）和无穷次可微函数$a(x)$相乘　因为对$\forall\phi(x)\in K$，均有$a(x)\phi(x)\in K$，$(f,a\phi)$是有定义的。因此我们可定义$af$为：

$$(af,\phi)\overset{\text{df}}{=}(f,a\phi),\qquad \forall\phi\in K. \tag{4.2.3}$$

从上面可以看到，广义函数的全部线性运算的定义基础都是将这种运算转移到基本函数上。至于非线性运算，例如广义函数的乘积等一般是没有意义的。

（5）微商　我们知道微分运算对通常的函数并不经常适用，因为按通常的意义没有导数的函数大量存在。但是，与此相反，广义函数的最重要的性质是它可以无穷多次求导，其导数也是广义函数。

为了定义广义函数的导数，先考虑通常的单变数函数$f(x)$，如果$f(x)$连续并有通常意义下的连续导数，那么可定义泛函

$$(f',\phi)=\int_R f'(x)\phi(x)dx \tag{4.2.4}$$

分部积分并考虑到$\phi\in K$是支集有界的，即在某区域$[a,b]$之外等于零，我们得到

$$(f',\phi)=f(x)\phi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\phi'(x)dx=(f,-\phi'),\tag{4.2.5}$$

也就是说微分运算同样可以转移到基本函数上。等式(4.2.5)就可以作为我们定义广义函数的导数的基础。设$f$是基本空间$K$上的任一线性连续泛函，我们称由公式

$$(g,\phi)=(f,-\phi'),\quad \forall\phi\in K\tag{4.2.6}$$

确定的泛函$g$为泛函$f$的导数，记作$f'$或$df/dx$。

为了验证这个定义的正确性，我们指出，泛函$g$也是基本空间$K$上的线性连续泛函。首先，泛函$g$是定义在一切函数$\phi\in K$之上的，因为$\phi'$和$\phi$一样都是基本函数。显然，泛函$g$是线性的，剩下要证明$g$还是连续的。设给定一个基本函数序列$\phi_\nu(x)$ $(\nu=1, 2, \cdots)$，在空间$K$中趋于零。根据定义4.4，它们的导数组成的序列$\phi_\nu'(x)$也同样在空间$K$中趋于零。因此，由于泛函$f$的连续性

$$(g,\phi_\nu)=(f,-\phi_\nu')\to 0,\tag{4.2.7}$$

这就证明了我们的断言。因此，每一个广义函数$f$都有导数，且仍然是广义函数，可以继续微分。于是，一切广义函数都是无限次可微的。转而考虑多变数的情况，将$f$的$m$阶偏导数记为

$$f_{,\nu_1\cdots\nu_m}(x),$$

于是有

$$(f_{,\nu_1\cdots\nu_m},\ \phi)=(-1)^m(f,\ \phi_{,\nu_1\cdots\nu_m}),\qquad \forall\phi\in K.\tag{4.2.8}$$

特别地，对$\delta(x)$有

$$\begin{aligned}(\delta_{,\nu_1\cdots\nu_m},\ \phi)&=(-1)^m(\delta,\ \phi_{,\nu_1\cdots\nu_m})\\&=(-1)^m\int_{R^n}\delta(x)\phi_{,\nu_1\cdots\nu_m}(x)dx\\&=(-1)^m\phi_{,\nu_1\cdots\nu_m}(0).\end{aligned}\tag{4.2.9}$$

可以看出，$\delta(x)$及其各阶导数的支集均为$x=0$。反之，我们不加证明地给出

**定理4.1** 任何支集为$x=0$点的广义函数可表为$\delta(x)$及其导数的线性组合。

作为例子我们这里计算$\Delta(1/r)$，其中$r^2=x^2+y^2+z^2$，$\Delta$是拉普拉斯算子$\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$，$x,y,z$是三维空间中的笛卡尔直角坐标。注意到$1/r$在不包含坐标原点的任意区域中是调和的，因而$r\neq 0$时$\Delta(1/r)=0$（在通常的意义下）。考虑广义函数空间中的拉普拉斯算子，有

$$\left(\Delta\left(\frac{1}{r}\right),\ \phi\right)=\left(\frac{1}{r},\ \Delta\phi\right)=\int_V\frac{\Delta\phi}{r}dV=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{r>\varepsilon}\frac{\Delta\phi}{r}dV$$

对最后一个积分用格林公式。设区域$G$是球面层$\varepsilon\leqslant r\leqslant a$，这里$a$取得相当大从而使得在球$r\leqslant a$以外函数$\phi(x)$恒等于零，于是

$$\int_{r>\varepsilon}\frac{\Delta\phi}{r}dV=\int_{r>\varepsilon}\phi\Delta\left(\frac{1}{r}\right)dV-\int_{r=\varepsilon}\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{1}{r}dS$$

$$+\int_{r=\varepsilon}\phi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)dS$$

其中$dS$是球面$r=\varepsilon$上的面积元。其次，我们有

$$\int_{r>\varepsilon}\phi\Delta\left(\frac{1}{r}\right)dV=0,$$

因为$1/r$在$r\leqslant\varepsilon$之外是调和函数。另外

$$\int_{r=\varepsilon}\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{1}{r}dS=\frac{1}{\varepsilon}\int_{r=\varepsilon}\frac{\partial\phi}{\partial r}dS.$$

由于$\partial\phi/\partial r$有界，可以设$|\partial\phi/\partial r|\leqslant M$，于是

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{r=\varepsilon}\frac{\partial\phi}{\partial r}dS\right|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_{r=\varepsilon}\left|\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|dS\leqslant\frac{M}{\varepsilon}\int_{r=\varepsilon}dS$$

$$=\frac{M}{\varepsilon}4\pi\varepsilon^2\to 0,\ （当\ \varepsilon\to 0）.$$

而

$$\int_{r=\varepsilon}\phi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)dS=-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{r=\varepsilon}\phi dS=-4\pi S_\varepsilon(\phi),$$

这里 $S_\varepsilon(\phi)$ 是函数 $\phi(x)$ 在半径为 $\varepsilon$ 的球面上的平均值。当 $\varepsilon\to0$，取极限则有 $S_\varepsilon(\phi)\to\phi(0)$。于是

$$\left(\Delta\left(\frac{1}{r}\right),\ \phi\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{r>\varepsilon}\frac{\Delta\phi}{r}dV=-4\pi\phi(0)=-4\pi(\delta,\phi).$$

这表明

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\delta(r). \tag{4.2.10}$$

这个例子显示了用定义来求广义函数的导数的方法。由于 $\Delta r=2/r$，故我们还有

$$\Delta\Delta r=-8\pi\delta(r). \tag{4.2.11}$$

**（6）积分** 为简单起见，仅以一元函数为例。

设广义函数 $F(x)$ 和 $f(x)$ 满足关系

$$f'(x)=F(x), \tag{4.2.12}$$

则称 $f(x)$ 为 $F(x)$ 的原函数。于是可定义不定积分

$$f(x)=\int F(x)dx. \tag{4.2.13}$$

至于定积分，如果讨论的广义函数除了在积分区域 $G$ 内的一个闭子域 $\bar{G}^*$ 以外都是正则的连续函数，而且直到 $G$ 的（光滑的）边界 $\Gamma$ 上都是连续的，则通常函数的微积分基本定理也同样成立，这里就不多介绍了。

**（7）广义函数的直积** 为了后面的应用，我们简单介绍一下广义函数的直积。给定广义函数 $f(x)$ 和 $g(y)$，$f(x)$ 定义在 $k$ 个独立变量 $x_1,\cdots,x_k$ 的基本函数空间 $X_k$ 上，而 $g(y)$ 定义在 $m$ 个独立变量 $y_1,\cdots,y_m$ 的基本函数空间 $Y_m$ 上。利用这两个广义函数我们可以定义在 $n=k+m$ 个独立变量 $z_1=x_1,\ z_2=x_2,\ \cdots,\ z_k=x_k, z_{k+1}=y_1, z_{k+2}=y_2,\ \cdots,\ z_{k+m}=y_m$ 的基本函数空间 $Z_n$ 上的广义函数 $h(z)$。为此，先以 $\phi(x,y)$ 表示基本函数 $\phi(z)$，固定 $x$，并且把 $\phi(x,y)$ 当作只是 $y$ 的函数，显然这是空间 $Y_m$ 中的基

本函数．设泛函 $g(y)$ 作用于它，结果得到某个函数 $\psi(x)$．可以验证这个函数对 $x$ 是无限次可微的且是支集有界的，即 $\psi(x)$ 是空间 $X_k$ 中的基本函数．因此就可以把泛函 $f(x)$ 再作用于它．于是，表达式

$$(f,(g,\phi(x,y))) \tag{4.2.14}$$

有意义．这是空间 $Z_n$ 上的一个泛函．从泛函 $g(y)$ 和 $f(x)$ 的连续性可以推出这个泛函的连续性．我们用 $h(z)=f(x)\times g(y)$ 来表示它（在不致引起混淆的情况可省去"×"号），并称为泛函 $f(x)$ 对泛函 $g(y)$ 的直积．

例如，直积 $\delta(x_1)\times\delta(x_2)\times\cdots\times\delta(x_n)$ 即 $\delta(x)$．直积 $\delta(x_1)\times 1(x_2)$ 是由公式

$$(\delta(x_1)\times 1(x_2),\ \phi(x_1,x_2))=\int_{X_2}\phi(0,x_2)dx_2 \tag{4.2.15}$$

定义的泛函．如果设泛函 $f$ 和 $g$ 的支集为 $F$ 与 $G$，则泛函 $h=f\times g$ 的支集是 $f$ 的支集与 $g$ 的支集的直积 $F\times G$．换句话说，$h$ 的支集 $H$ 仅由第一个坐标 $x$ 属于集合 $F$，而第二个坐标属于 $G$ 的点对 $(x,y)$ 组成．泛函的直积满足

（1）交换律 $f(x)\times g(y)=g(y)\times f(x)$, (4.2.16)

（2）结合律 $f(x)\times\{g(y)\times h(z)\}$

$$=\{f(x)\times g(y)\}\times h(z), \tag{4.2.17}$$

这里就不再验证了．

现在回过头来看看本章开始时提出来的集中力的例子，梁的方程可以统一地写成

$$EJw^{(N)}=P\delta(x-x_0), \tag{4.2.18}$$

这里 $w, w^{(N)}$ 等都看作广义函数．由于

$$Q=-EJw''' \tag{4.2.19}$$

得到

$$Q'=-EJw^{(N)}=-P\delta(x-x_0), \tag{4.2.20}$$

我们引进函数 $P(x)$，使

$$P(x)=P,\quad x_0-\varepsilon\leqslant x\leqslant x_0+\varepsilon \tag{4.2.21}$$

并在其它点适当延拓使 $P(x)\in K$。注意到 $\delta(x)$ 满足上述引进广义函数的定积分的要求，可以对(4.2.20)式从 $x_0-\varepsilon$ 到 $x_0+\varepsilon$ 积分得

$$-\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} Q'dx=\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} P\delta(x-x_0)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\delta(x-x_0)dx=P, \tag{4.2.22}$$

即

$$Q(x_0+\varepsilon)-Q(x_0-\varepsilon)=-P, \tag{4.2.23}$$

当 $\varepsilon\to 0$，就得到跳跃条件，而不必将它单独列出。

## §4.3 线、面、体的δ-函数

本节的讨论局限于 $R^3$，记点 $x(x_1,x_2,x_3)$ 的向径是 $\mathbf{x}$，则(4.1.20)和(4.1.21)可以写成

$$\int \delta(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})dV=\phi(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}=0}=\phi(0), \tag{4.3.1}$$

$$\int\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\phi(\mathbf{x})dV=\phi(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'}=\phi(\mathbf{x}'). \tag{4.3.2}$$

设 $L$、$S$、$V$ 分别是 $R^3$ 的曲线段、曲面块和体区域，为了描述物体的孤立缺陷，我们引进**线、面、体δ-函数**——$\delta(L)$、$\delta(S)$ 和 $\delta(V)$。它们定义如下：

$$\int \delta(L)\phi(\mathbf{x})dV=\int_L \phi(\mathbf{x})dL, \tag{4.3.3}$$

$$\int \delta(S)\phi(\mathbf{x})dV=\int_S \phi(\mathbf{x})dS, \tag{4.3.4}$$

$$\int \delta(V)\phi(\mathbf{x})dV = \int_V \phi(\mathbf{x})dV. \tag{4.3.5}$$

易见它们和 $\delta(\mathbf{x})$ 有下述关系：

$$\delta(L) = \int_L \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')dL', \quad (\mathbf{x}' \in L'), \tag{4.3.6}$$

$$\delta(S) = \int_S \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')dS', \quad (\mathbf{x}' \in S'), \tag{4.3.7}$$

$$\delta(V) = \int_V \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')dV', \quad (\mathbf{x}' \in V'). \tag{4.3.8}$$

因为，例如将(4.3.6)代入(4.3.3)，交换积分次序，并利用(4.3.2)我们有

$$\int\left\{\int_L \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')dL'\right\}\phi(\mathbf{x})dV$$

$$= \int_L\left\{\int \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\phi(\mathbf{x})dV\right\}dL' = \int_L \phi(\mathbf{x}')dL'. \tag{4.3.9}$$

为了后面应用的方便，利用§4.2介绍的广义函数的直积，我们也可以引进它们的等价的定义。例如，设曲线段 $L$ 可表成

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(y_1), \quad a \leqslant y_1 \leqslant b, \tag{4.3.10}$$

将 $L$ 取作为一坐标曲线，将 $y_1$ 扩展成 $R^3$ 中的曲线坐标系 $(y_1, y_2, y_3)$，此时 $L$ 可表成

$$L: \begin{cases} a \leqslant y_1 \leqslant b, \\ y_2 = 0, \\ y_3 = 0. \end{cases} \tag{4.3.11}$$

引进一个具有间断的普通标量函数

$$1(L) = 1(y_1) = \begin{cases} 1, & a \leqslant y_1 \leqslant b, \\ 0, & y_1 > b \text{ 或 } y_1 < a, \end{cases} \tag{4.3.12}$$

则我们有

$$\delta(L)\overset{\mathrm{df}}{=}1(y_1)\times\delta(y_2)\times\delta(y_3). \tag{4.3.13}$$

因为由直积的定义，对$\forall\phi(\mathbf{x})=\phi(y_1,y_2,y_3)\in K$，

$$\begin{aligned}
&(1(y_1)\times\delta(y_2)\times\delta(y_3),\phi(y_1,y_2,y_3))\\
&\quad=(1(y_1),(\delta(y_2),(\delta(y_3),\phi(y_1,y_2,y_3))))\\
&\quad=\int 1(y_1)dy_1\int\delta(y_2)dy_2\int\delta(y_3)\phi(y_1,y_2,y_3)dy_3\\
&\quad=\int 1(y_1)dy_1\int\delta(y_2)\phi(y_1,y_2,0)dy_2\\
&\quad=\int 1(y_1)\phi(y_1,0,0)dy_1\\
&\quad=\int_L\phi(y_1,0,0)dy_1\\
&\quad=\int_L\phi(x')dL'.
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

可以看到，$\delta(L)$在$\mathbf{x}\notin L$的整个开区域均为零，故$\delta(L)$的支集为$L$。同样地，如果曲面块$S$表成

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(y_1,y_2),\quad (y_1,y_2)\in D, \tag{4.3.15}$$

引进第三个坐标$y_3$使$(y_1,y_2,y_3)$扩展成为$R^3$中的一个曲线坐标系，在这个坐标系中$S$表成

$$S:\begin{cases}(y_1,y_2)\in D,\\ y_3=0.\end{cases} \tag{4.3.16}$$

引进具有间断的普通标量函数

$$1(S)=1(y_1,y_2)=\begin{cases}1,&(y_1,y_2)\in D,\\ 0,&(y_1,y_2)\notin D,\end{cases} \tag{4.3.17}$$

则

$$\delta(S)=1(S)\times\delta(y_3), \tag{4.3.18}$$

因为对$\forall\phi(\mathbf{x})=\phi(y_1,y_2,y_3)\in K$，

$$
\begin{aligned}
&(1(S)\times\delta(y_3),\phi(y_1,y_2,y_3))\\
&\quad=(1(S),(\delta(y_3),\phi(y_1,y_2,y_3)))\\
&\quad=\int 1(S)dy_1dy_2\int\delta(y_3)\phi(y_1,y_2,y_3)dy_3\\
&\quad=\int 1(S)\phi(y_1,y_2,0)dy_1dy_2\\
&\quad=\int_S\phi(\mathbf{x}')dS'.
\end{aligned}
\tag{4.3.19}
$$

至于体 $\delta$-函数

$$
\delta(V)=1(V)=\begin{cases}1, & \mathbf{x}\in V,\\ 0, & \mathbf{x}\notin V,\end{cases}
\tag{4.3.20}
$$

只是具有间断的普通标量函数而已。由于 $\delta(L)$, $\delta(S)$ 是广义函数，讨论在点 $\mathbf{x}'\in L$ 或 $\mathbf{x}'\in S$ 上 $\delta(L)$ 或 $\delta(S)$ 的值是没有意义的。如果在包含 $L$、$S$ 或 $V$ 的区域内取 $\phi(\mathbf{x})=1$，且将它延拓为一个基本函数，代入上面的定义式(4.3.3)～(4.3.5)中，我们得到表示弧长、面积和体积的三个积分 $\int\delta(L)dV$, $\int\delta(S)dV$ 和 $\int\delta(V)dV$。

类似地，还可以引进向量线、面 $\delta$-函数

$$
\boldsymbol{\delta}(L)\overset{\text{df}}{=}\mathbf{t}(y_1)\times\delta(y_2)\times\delta(y_3),
\tag{4.3.21}
$$

$$
\boldsymbol{\delta}(S)\overset{\text{df}}{=}\mathbf{n}(y_1,y_2)\times\delta(y_3),
\tag{4.3.22}
$$

这里 $\mathbf{t}$ 和 $\mathbf{n}$ 分别是线段 $L$ 的单位切向量和曲面块 $S$ 的单位法向量。如果记 $d\mathbf{L}=\mathbf{t}dL$, $d\mathbf{S}=\mathbf{n}dS$, 则 $\boldsymbol{\delta}(L)$、$\boldsymbol{\delta}(S)$ 和 $\delta(\mathbf{x})$ 有如下关系：

$$
\boldsymbol{\delta}(L)=\int_L\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d\mathbf{L}',\quad \mathbf{x}'\in L',
\tag{4.3.23}
$$

$$
\boldsymbol{\delta}(S)=\int_S\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d\mathbf{S}',\quad \mathbf{x}'\in S'.
\tag{4.3.24}
$$

因为，例如由(4.3.21)右端

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{t}(y_1)\times\delta(y_2)\times\delta(y_3),\phi(y_1,y_2,y_3))\\
&\quad=\int\mathbf{t}(y_1)dy_1\int\delta(y_2)dy_2\int\delta(y_3)\phi(y_1,y_2,y_3)dy_3\\
&\quad=\int\mathbf{t}(y_1)dy_1\int\delta(y_2)\phi(y_1,y_2,0)dy_2\\
&\quad=\int\mathbf{t}(y_1)\phi(y_1,0,0)dy_1\\
&\quad=\int_L\phi(\mathbf{x}')d\mathbf{L}',
\end{aligned}
\tag{4.3.25}
$$

由(4.3.23)右端又有

$$
\begin{aligned}
&\int\left\{\int_L\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d\mathbf{L}'\right\}\phi(\mathbf{x})dV\\
&\quad=\int_L\left\{\int\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\phi(\mathbf{x})dV\right\}d\mathbf{L}'\\
&\quad=\int_L\phi(\mathbf{x}')d\mathbf{L}'.
\end{aligned}
\tag{4.3.26}
$$

故两式的右端给出的是同一个泛函。当然，$\boldsymbol{\delta}(L)$或$\boldsymbol{\delta}(S)$在$\mathbf{x}\notin L$或$\mathbf{x}\notin S$的开区域处处为零。作为广义函数，讨论它们在$L$或$S$上的值也是不必要的。不过由定义(4.3.21)和(4.3.22)我们可以认为$\boldsymbol{\delta}(L)\parallel\mathbf{t}$而$\boldsymbol{\delta}(S)\parallel\mathbf{n}$。

对固定的$\mathbf{x}$，我们记$\phi(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\equiv\psi(\mathbf{x}')$，于是可把(4.3.25)等价地写成

$$
\begin{aligned}
&\int\boldsymbol{\delta}(L')\phi(\mathbf{x}-\mathbf{x}')dV'=\int\boldsymbol{\delta}(L')\psi(\mathbf{x}')dV'\\
&\quad=\int_L\psi(\mathbf{x}')d\mathbf{L}'=\int_L\phi(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d\mathbf{L}',
\end{aligned}
\tag{4.3.27}
$$

类似地有

$$\int \delta(S')\phi(\mathbf{x}-\mathbf{x}')dV'=\int_S \phi(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d\mathbf{S}', \tag{4.3.28}$$

$$\int \delta(V')\phi(\mathbf{x}-\mathbf{x}')dV'=\int_V \phi(\mathbf{x}-\mathbf{x}')dV'. \tag{4.3.29}$$

如果 $L$ 穿过 $S$（一次）于点 $\mathbf{x}^{LS}$，则

$$\int_S\int_L \phi(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d\mathbf{L}'\otimes d\mathbf{S}=\phi(\mathbf{x}^{LS})\frac{\mathbf{t}\otimes\mathbf{n}}{|\mathbf{tn}|}, \tag{4.3.30}$$

其中 $\mathbf{t}$、$\mathbf{n}$ 是在 $\mathbf{x}^{LS}$ 点分别切于 $L$ 和垂直于 $S$ 的单位向量。证明如下：可取 $\mathbf{x}^{LS}$ 为原点建立曲线坐标系 $(y_1, y_2, y_3)$ 使

$$L: \begin{cases} a\leqslant y_1\leqslant b \\ y_2=y_3=0, \end{cases} \tag{4.3.31}$$

$$S: \begin{cases} (y_2, y_3)\in D \\ y_1=0, \end{cases} \tag{4.3.32}$$

于是对 $\mathbf{x}\in S$ 和 $\mathbf{x}'\in L$ 有

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=\delta(0-y_1)\times\delta(y_2-0)\times\delta(y_3-0), \tag{4.3.33}$$

代入(4.3.30)之左端并注意到体积元 $dV=dy_1dy_2dy_3$ 可表成

$$dy_1dy_2dy_3=|d\mathbf{L}\cdot d\mathbf{S}|=dLdS|\mathbf{tn}|, \tag{4.3.34}$$

从而

$$d\mathbf{L}'\otimes d\mathbf{S}=dLdS\mathbf{t}\otimes\mathbf{n}=dy_1dy_2dy_3\frac{\mathbf{t}\otimes\mathbf{n}}{|\mathbf{tn}|}. \tag{4.3.35}$$

于是

$$\int_S\int_L \phi(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d\mathbf{L}'\otimes d\mathbf{S}$$

$$=\int_{R^3} \phi(y_1, y_2, y_3)\delta(0-y_1)\delta(y_2-0)\delta(y_3-0)$$

$$\cdot\frac{\mathbf{t}(y_1, 0, 0)\otimes\mathbf{n}(0, y_2, y_3)}{|\mathbf{t}(y_1, 0, 0)\mathbf{n}(0, y_2, y_3)|}dy_1dy_2dy_3$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(0-y_1)dy_1\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(y_2-0)dy_2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y_1,y_2,y_3)$$

$$\cdot\,\delta(y_3-0)\frac{\mathbf{t}(y_1,0,0)\otimes\mathbf{n}(0,y_2,y_3)}{|\mathbf{t}(y_1,0,0)\mathbf{n}(0,y_2,y_3)|}dy_3$$

$$=\phi(0,0,0)\frac{\mathbf{t}(0,0,0)\otimes\mathbf{n}(0,0,0)}{|\mathbf{t}(0,0,0)\mathbf{n}(0,0,0)|}$$

$$=\phi(\mathbf{x}^{LS})\frac{\mathbf{t}\otimes\mathbf{n}}{|\mathbf{tn}|}\tag{4.3.36}$$

得证。

如果在(4.3.30)式中将张量积改为点积，又有

$$\int_S\phi(\mathbf{x})\delta(L)d\mathbf{S}=\int_L\phi(\mathbf{x})\delta(S)d\mathbf{L}$$

$$=\begin{cases}\phi(\mathbf{x}^{LS}), & \text{若 } \mathbf{t} \text{ 和 } \mathbf{n} \text{ 夹角为锐角,}\\ 0, & \text{若 } L \text{ 不穿过 } S,\\ -\phi(\mathbf{x}^{LS}), & \text{若 } \mathbf{t} \text{ 和 } \mathbf{n} \text{ 夹角为钝角.}\end{cases}\tag{4.3.37}$$

求线、面、体 $\delta$-函数的导数得运用广义函数求导数法则，例如对 $\delta$-函数有

$$\int\delta\nabla(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\phi(\mathbf{x})dV=-\int\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\phi\nabla(\mathbf{x})dV,\tag{4.3.38}$$

或写成分量形式

$$\int\delta_{,i}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\phi(\mathbf{x})dV=-\int\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\phi_{,i}(\mathbf{x})dV.\tag{4.3.39}$$

因为由(4.3.23)、(4.3.24)和(4.3.8)并注意到 $\nabla\otimes d\mathbf{L}'=0$, $\nabla\otimes d\mathbf{S}'=0$ 和 $\nabla\otimes dV'=0$，我们有

$$\nabla\otimes\delta(L)=\int_L\delta\nabla(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\otimes d\mathbf{L}',\tag{4.3.40}$$

$$\nabla\otimes\delta(S)=\int_S\delta\nabla(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\otimes d\mathbf{S}',\tag{4.3.41}$$

$$\delta\nabla(V)=\int_V \delta\nabla(\mathbf{x}-\mathbf{x}')dV'. \tag{4.3.42}$$

从而，根据(4.3.38)我们得到

$$\begin{aligned}
&\int[\nabla\otimes\delta(L)]\phi(\mathbf{x})dV \\
&=\int\left\{\int_L \delta\nabla(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\otimes d\mathbf{L}'\right\}\phi(\mathbf{x})dV \\
&=\int_L\left\{\int\delta\nabla(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\phi(\mathbf{x})dV\right\}\otimes d\mathbf{L}' \\
&=-\int\left\{\int\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\phi\nabla(\mathbf{x})dV\right\}\otimes d\mathbf{L}' \\
&=-\int_L \phi\nabla(\mathbf{x}')\otimes d\mathbf{L}'=-\int_L\phi\nabla(\mathbf{x})\otimes d\mathbf{L},
\end{aligned} \tag{4.3.43}$$

类似地

$$\int[\nabla\otimes\delta(S)]\phi(\mathbf{x})dV=-\int_S\phi\nabla(\mathbf{x})\otimes d\mathbf{S}, \tag{4.3.44}$$

$$\int[\delta(V)\nabla]\phi(\mathbf{x})dV=-\int_V\phi\nabla(\mathbf{x})dV. \tag{4.3.45}$$

如果$S=\partial V$，利用散度定理(1.4.17)和(4.3.28)，上式给出

$$\begin{aligned}
\int[\delta(V)\nabla]\phi(\mathbf{x})dV&=-\int_V\phi\nabla(\mathbf{x})dV \\
&=-\oint_S\phi(\mathbf{x})d\mathbf{S} \\
&=-\int\delta(S)\phi(\mathbf{x})dV,
\end{aligned} \tag{4.3.46}$$

$\phi(\mathbf{x})$的任意性导致$\delta$-函数的散度定理

$$\delta(V)\nabla=-\delta(S),\quad (S=\partial V). \tag{4.3.47}$$

并且总有

$$\boldsymbol{\delta}(S)\times\boldsymbol{\nabla}=-\delta(V)\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}=0. \tag{4.3.48}$$

在(4.3.44)式中以叉积代替张量积且令 $S$ 的边界为 $L$，利用 Stokes 公式(1.4.20)和(4.3.23)得

$$\int[\boldsymbol{\delta}(S)\times\boldsymbol{\nabla}]\phi(\mathbf{x})\,dV=\int_S\phi\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{x})\times d\mathbf{S}$$

$$=-\oint\phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{L}=-\int\boldsymbol{\delta}(L)\phi(\mathbf{x})\,dV, \tag{4.3.49}$$

$\phi(\mathbf{x})$ 的任意性又导致 $\delta$-函数的 Stokes 公式

$$\boldsymbol{\delta}(S)\times\boldsymbol{\nabla}=-\boldsymbol{\delta}(L),\quad(L=\partial S), \tag{4.3.50}$$

或

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\delta}(S)=\boldsymbol{\delta}(L), \tag{4.3.51}$$

$$\epsilon\boldsymbol{\delta}(L)=\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\delta}(S)-\boldsymbol{\delta}(S)\otimes\boldsymbol{\nabla}. \tag{4.3.52}$$

(4.3.48)和(4.3.50)是一致的，因为当 $S$ 为封闭曲面时，其边界收缩为一个点。求(4.3.50)的散度，对封闭的 $L$，又得

$$\boldsymbol{\delta}(L)\boldsymbol{\nabla}=0. \tag{4.3.53}$$

# 第五章　孤立缺陷理论

在本章我们将运用$\delta$-函数及其推广导出各层次的孤立缺陷理论的数学表述。我们仍将采用第三章开始时所引进的假设，并将说明在第三章第三节引入的 Frank 向量和 Burgers 向量的物理意义。

## §5.1　孤立位错

设物体内有一区域部分$V$塑性地整体相对其它部分平移了一个常向量$\mathbf{d}$，即从$V$通过$S=\partial V$时（设这是$S$的正方向）有一跳跃增量$[\mathbf{u}]$，这时物体的塑性位移是

$$\mathbf{u}^P(\mathbf{x})=[\mathbf{u}]\delta(V), \qquad (5.1.1)$$

这里用到$\delta(V)$的性质(4.3.20)，这种情况的塑性畸变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}^P(\mathbf{x})&=\mathbf{u}^P\otimes\nabla=[\mathbf{u}]\otimes\delta(V)\nabla\\&=-[\mathbf{u}]\otimes\boldsymbol{\delta}(S)=-\mathbf{d}\otimes\boldsymbol{\delta}(S),\end{aligned} \qquad (5.1.2)$$

这里用到了$\delta$-函数的散度定理(4.3.47)。从上式可见，畸变集中在交界面$S$上。若$S$不是封闭曲面，但通到边界上，可以认为曲面$S$可延拓到体外而形成一个封闭曲面，这样可以认为(5.1.2)式对不封闭的曲面$S$也是成立的。记这个不封闭的曲面$S$的边界为$L=\partial S$，其正方向与$S$的法方向成右螺旋。因为塑性畸变$\boldsymbol{\beta}^P$集中在$S$，且跳跃增量为平移，我们有所谓**孤立位错**。$L$称为**位错线**。取任意绕过$L$的闭回路$\Lambda$，它在点$\mathbf{x}^{\Lambda S}$穿过$S$，$\Lambda$的正方向与$S$在点$\mathbf{x}^{\Lambda S}$的法方向$\mathbf{n}$夹角为锐角。利用(4.3.37)式得

$$\oint_{\Lambda} \mathbf{d}[\delta(S)d\mathbf{\Lambda}]=\mathbf{d}, \tag{5.1.3}$$

由张量积的定义

$$\mathbf{d}[\delta(S)d\mathbf{\Lambda}]=[\mathbf{d}\otimes\delta(S)]d\mathbf{\Lambda}=-\boldsymbol{\beta}^P d\mathbf{\Lambda}, \tag{5.1.4}$$

再应用 Stokes 公式和（3.2.2）得到

$$\mathbf{d}=-\oint\boldsymbol{\beta}^P d\mathbf{\Lambda}=\int_{\Sigma}(\boldsymbol{\beta}^P\times\boldsymbol{\nabla})d\mathbf{\Sigma}=-\int_{\Sigma}\boldsymbol{\alpha}d\mathbf{\Sigma}, \tag{5.1.5}$$

其中$\Sigma$是$\Lambda$所张的曲面。

在第三章我们讲过 Burgers 向量的定义为

$$\mathbf{b}=-\int_{\Sigma}(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{x}\times\boldsymbol{\theta})d\mathbf{\Sigma}. \tag{5.1.6}$$

在纯位错情形，$\boldsymbol{\theta}=0$，故比较（5.1.6）和（5.1.5）知

$$\mathbf{b}=\mathbf{d}, \tag{5.1.7}$$

即在孤立位错中 Burgers 向量就是$S$面下面部分相对于上面部分的整体相对位移。若设$\Sigma$的法向量为$\mathbf{N}$，$d\mathbf{\Sigma}=\mathbf{N}d\Sigma$，

$$\mathbf{b}=-\int_{\Sigma}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{N}d\Sigma, \tag{5.1.8}$$

当$\Sigma\to 0$，取极限得到

$$\mathbf{b}=-\boldsymbol{\alpha}\mathbf{N}. \tag{5.1.9}$$

这一关系式正是类似于应力向量和应力张量之间的关系$\mathbf{t}=\boldsymbol{\sigma}\mathbf{N}$，由此知道若给出$\boldsymbol{\alpha}$，则穿过某一曲面$\Sigma$的位错线对应的 Burgers 向量$\mathbf{b}$可由$\boldsymbol{\alpha}$作用于$\mathbf{N}$给出。用$\delta$-函数的 Stokes 定理(4.3.50)我们又有

$$\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\beta}^P\times\boldsymbol{\nabla}=[\mathbf{b}\otimes\delta(S)]\times\boldsymbol{\nabla}=-\mathbf{b}\otimes\delta(L), \tag{5.1.10}$$

它表明在孤立位错的情形，位错密度张量除了位错线$L$外处处为零。而且由于在$L$上$\delta(L)\parallel\mathbf{t}$（位错线$L$的方向）；$\boldsymbol{\alpha}$是由$\mathbf{b}$和$\delta(L)$（位错线方向）的张量积来描述的。当$\mathbf{b}\perp\delta(L)$是**刃型位错**，而$\mathbf{b}\parallel\delta(L)$是**螺型位错**。一般地，$\mathbf{b}$是常量，但由于在$L$上$\mathbf{t}$随点而变动，位错的状态可以不一样，是以上两种标准型位错的组合。

如果在$\Lambda$内包含有若干条孤立位错线 $\underset{i}{L}=\partial\underset{i}{S}$，Burgers 向量就是各个$\underset{i}{S}$面两侧位移间断量的向量和

$$\mathbf{b}=\sum_i \underset{i}{\mathbf{b}}=\oint_{\Lambda}\Big[\sum_i \underset{i}{\mathbf{b}}\otimes\delta(\underset{i}{S})\Big]d\mathbf{\Lambda}. \tag{5.1.11}$$

$$\boldsymbol{\beta}^P(\mathbf{x})=-\sum_i \mathbf{b}_i\otimes\delta(\underset{i}{S}), \tag{5.1.12}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\beta}^P\times\boldsymbol{\nabla}=\sum_i \mathbf{b}_i\otimes\delta(\underset{i}{L}). \tag{5.1.13}$$

第三章讨论的连续位错现在就可解释成位错线连续充满整个物体的情形。将（4.3.53）应用于（5.1.10）式再次得到连续性方程

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\nabla}=0, \tag{5.1.14}$$

此时位错线$L$是封闭曲线，在物体内没有始终。

## §5.2 孤 立 缺 陷

类似于§5.1，进一步设物体的某一部分$V$塑性地整体相对于其余部分不仅平移了$\mathbf{d}$，而且转动（相对于某点$\mathbf{x}^0$）$\boldsymbol{\psi}$，则这部分$V$各点$\mathbf{x}$的位移就是

$$\mathbf{d}+\boldsymbol{\psi}\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) \tag{5.2.1}$$

而整个物体各点$\mathbf{x}$的塑性位移可用体$\delta$-函数表成

$$\mathbf{u}^P(\mathbf{x})=[\mathbf{d}+\boldsymbol{\psi}\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)]\delta(V). \tag{5.2.2}$$

由散度定理，并注意到

$$[\boldsymbol{\psi}\times(\mathbf{x}\otimes\boldsymbol{\nabla})]\delta(V)=\boldsymbol{\psi}\times\mathbf{I}\delta(V)=-\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\psi}\delta(V), \tag{5.2.3}$$

我们得到塑性畸变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}^P(\mathbf{x})&=\mathbf{u}^P(\mathbf{x})\otimes\boldsymbol{\nabla}\\&=-[\mathbf{d}+\boldsymbol{\psi}\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)]\otimes\delta(S)-\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\psi}\delta(V)\\&=\mathring{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\psi}\delta(V),\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

其中

$$\mathring{\boldsymbol{\beta}}\overset{\mathrm{df}}{=}-[\mathbf{d}+\boldsymbol{\psi}\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)]\otimes\delta(S). \tag{5.2.5}$$

由此可算出塑性转动向量

$$\boldsymbol{\omega}^P(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\,\epsilon:\mathbf{W}^P = -\frac{1}{2}\,\epsilon:\boldsymbol{\beta}^P$$

$$= -\frac{1}{2}\,\epsilon:\mathring{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\psi}\delta(V). \tag{5.2.6}$$

如果用上标"$S$"和"$A$"分别表示相应张量的对称 和 反对称部分，则塑性应变和塑性弯扭分别为

$$\mathbf{e}^P = \boldsymbol{\beta}^{PS} = \mathring{\boldsymbol{\beta}}^S, \tag{5.2.7}$$

$$\Xi^P = \boldsymbol{\omega}^P \otimes \nabla = -\frac{1}{2}\,\epsilon:\boldsymbol{\beta}\otimes\nabla - \boldsymbol{\psi}\otimes\boldsymbol{\delta}(S)$$

$$= -\frac{1}{2}\,\epsilon:\mathring{\boldsymbol{\beta}}\otimes\nabla + \mathring{\boldsymbol{\phi}}, \tag{5.2.8}$$

其中

$$\mathring{\boldsymbol{\phi}} = -\boldsymbol{\psi}\otimes\boldsymbol{\delta}(S). \tag{5.2.9}$$

可以看到应变和弯扭都集中在交界面$S$上，因为$\mathring{\boldsymbol{\beta}}$和$\mathring{\boldsymbol{\phi}}$均由面$\delta$-函数$\boldsymbol{\delta}(S)$表示。

在孤立缺陷的情形，$\mathbf{e}^P$ 和 $\Xi^P$ 是给定的不协调应变和弯扭，（这意味着塑性位移和塑性转动是不可积的，即已不能表成经典的点函数了）。我们设想存在着与之反号的弹性应变$\mathbf{e}$和 $\Xi$使总畸变仍是协调的。于是根据公式（3.3.12～13）可以用（5.2.7）、（5.2.8）计算出刻划位错的各量 $\mathbf{b}$、$\boldsymbol{\Omega}$（以及 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\theta}$），比较它们与$\mathbf{d}$、$\boldsymbol{\psi}$的关系，从而解释它们的物理意义。

由定义，Frank 向量为（仍用§5.1中的回路）

$$\boldsymbol{\Omega} = \oint_A \Xi\, d\boldsymbol{\Lambda} = -\oint_A \Xi^P d\boldsymbol{\Lambda}$$

$$= \oint_A \left[\frac{1}{2}(\epsilon:\mathring{\boldsymbol{\beta}})\otimes\nabla - \mathring{\boldsymbol{\phi}}\right] d\boldsymbol{\Lambda}, \tag{5.2.10}$$

将 Stokes 公式（1.4.20）应用于第一项

$$\oint (\epsilon:\mathring{\beta})\otimes\nabla d\Lambda = -\int_{\Sigma}[(\epsilon:\mathring{\beta})\otimes\nabla\times\nabla]d\Sigma = 0, \tag{5.2.11}$$

并将 (5.2.9) 代入第二项，根据 (4.3.37) 我们有

$$\begin{aligned}\Omega &= \oint_{\Lambda}[\psi\otimes\delta(S)]d\Lambda \\ &= \oint_{\Lambda}\psi[\delta(S)d\Lambda] \\ &= \psi. \end{aligned}\tag{5.2.12}$$

这里用到$\Lambda$的正方向应与 $S$ 的正方向夹角为锐角。故 Frank 向量$\Omega$即相对转动向量$\psi$。现在来计算 Burgers 向量

$$\mathbf{b} = \oint_{\Lambda}[\mathbf{e}+\mathbf{x}\times\Xi]\,d\Lambda = -\oint_{\Lambda}[\mathbf{e}^{P}+\mathbf{x}\times\Xi^{P}]d\Lambda, \tag{5.2.13}$$

将 (5.2.7)，(5.2.8) 代入并注意到

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}\times\left[-\frac{1}{2}(\epsilon:\beta)\otimes\nabla\right] \\ &= -\frac{1}{2}\epsilon:\mathbf{x}\otimes[(\epsilon:\beta)\otimes\nabla] \\ &= \mathbf{x}\mathring{\beta}^{A}\otimes\nabla \\ &= \mathring{\beta}^{A}+(\mathbf{x}\mathring{\beta}^{A})\otimes\nabla, \end{aligned}\tag{5.2.14}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= -\oint_{\Lambda}\left[\mathring{\beta}^{S}+\mathbf{x}\times\left(-\frac{1}{2}\epsilon:\beta\otimes\nabla+\mathring{\phi}\right)\right]d\Lambda \\ &= -\oint_{\Lambda}[\mathring{\beta}^{S}+\mathring{\beta}^{A}+(\mathbf{x}\mathring{\beta}^{A})\otimes\nabla+\mathbf{x}\times\mathring{\phi}]d\Lambda. \end{aligned}\tag{5.2.15}$$

类似于 (5.2.11)，上式第三项积分为零，又考虑到$\mathring{\beta}^{S}+\mathring{\beta}^{A}=\mathring{\beta}$，并且将 (5.2.5)、(5.2.9) 代入，注意到 $\psi\times\mathbf{x}=-\epsilon:\mathbf{x}\otimes\psi$，根据 (4.3.37) 得到

$$\mathbf{b}=-\oint_{\Lambda}(\mathring{\boldsymbol{\beta}}+\mathbf{x}\times\mathring{\boldsymbol{\phi}})d\Lambda$$

$$=\oint_{\Lambda}\left\{[\mathbf{d}+\boldsymbol{\psi}\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)+\boldsymbol{\epsilon}:\mathbf{x}\otimes\boldsymbol{\psi}]\otimes\delta(S)\right\}d\Lambda$$

$$=\oint_{\Lambda}(\mathbf{d}-\boldsymbol{\psi}\times\mathbf{x}^0)\otimes\delta(S)d\Lambda$$

$$=\mathbf{d}-\boldsymbol{\psi}\times\mathbf{x}^0. \qquad (5.2.16)$$

将（5.2.12）代入得塑性平移向量 d 和 Burgers 向量 b 的关系

$$\mathbf{d}=\mathbf{b}+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x}^0. \qquad (5.2.17)$$

因此，b除了跟 d 和ψ有关外，还依赖于$\mathbf{x}^0$的选取。根据 Frank 向量和 Burgers 向量的定义，它们都是对弹性变形量的回路积分。用 Volterra 的沿母线切开的圆筒模型就可以得到关于 d 和 ψ 的解释：见图5-1，面$S$的法向 n 和回路$\Lambda$的正向 t 夹角为锐角。位错线$L$与$\Lambda$成右螺旋。对照（2.2.10）

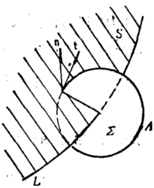



图 5-1

和（2.2.11）式我们看到，d 和 ψ 分别是切面$S$上面部分相对下面部分进行了的非协调的相对弹性位移[u]和相对弹性转动[ω]。

下面计算位错密度 α和向错密度 θ。因为

$$\mathbf{e}^P\times\nabla=\mathbf{e}^P\otimes\nabla:\boldsymbol{\epsilon}, \qquad (5.2.18)$$

$$(\mathrm{tr}\boldsymbol{\Xi}^P)\mathbf{I}-\boldsymbol{\Xi}^{P*}=\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\Xi}^P:\boldsymbol{\epsilon}, \qquad (5.2.19)$$

（3.2.19）式可以改写成

$$\boldsymbol{\alpha}=-(\mathbf{e}^P\otimes\nabla-\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\Xi}^P):\boldsymbol{\epsilon}. \qquad (5.2.20)$$

将（5.2.7）、（5.2.8）、（5.2.5）和（5.2.9）依次代入得

$$\boldsymbol{\alpha}=-(\mathring{\boldsymbol{\beta}}^S\otimes\nabla+\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}:\mathring{\boldsymbol{\beta}}\otimes\nabla-\boldsymbol{\epsilon}\mathring{\boldsymbol{\phi}}):\boldsymbol{\epsilon}$$

$$=-(\mathring{\boldsymbol{\beta}}^S\otimes\nabla+\mathring{\boldsymbol{\beta}}^A\otimes\nabla-\boldsymbol{\epsilon}\mathring{\boldsymbol{\phi}}):\boldsymbol{\epsilon}$$

$$=-[\dot{\beta}\otimes\nabla+\epsilon\psi\otimes\delta(S)]:\epsilon$$
$$=(\{[\mathbf{d}+\psi\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)]\otimes\delta(S)\}\otimes\nabla+\epsilon\psi\otimes\delta(S)):\epsilon$$
$$=\{[\mathbf{d}+\psi\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)]\otimes[\delta(S)\otimes\nabla]-\epsilon\psi\otimes\delta(S)$$
$$+\epsilon\psi\otimes\delta(S)\}:\epsilon$$
$$=[\mathbf{d}+\psi\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)]\otimes[\delta(S)\otimes\nabla]:\epsilon$$
$$=[\mathbf{d}+\psi\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)]\otimes[\delta(S)\times\nabla] \tag{5.2.21}$$

利用（4.3.50）和（5.2.12）、(5.2.16）最后得到

$$\alpha=-[\mathbf{d}+\psi\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)]\otimes\delta(L)$$
$$=-(\mathbf{b}+\Omega\times\mathbf{x})\otimes\delta(L). \tag{5.2.22}$$

将（5.2.8）代入定义（3.3.1）并利用（5.2.9）和（4.3.50）又得

$$\theta=-\Xi^P\times\nabla=-\mathring{\phi}\times\nabla=\psi\otimes\delta(S)\times\nabla$$
$$=-\psi\otimes\delta(L)=-\Omega\otimes\delta(L). \tag{5.2.23}$$

与孤立位错情形不同，为了刻划缺陷线上一点的孤立缺陷的位错密度，除了 Burgers 向量和缺陷线上的$\delta(L)$外，还需要 Frank 向量$\Omega$。而向错密度则完全由 Frank 向量$\Omega$和位错线$L$刻划。类似地，若$\Omega\parallel \mathbf{t}$是楔型向错；若$\Omega\perp\mathbf{t}$是扭型向错。一般情况是混合型的。至于位错情况就比较复杂，但仍可分成刃型和螺型的混合。

由（3.3.4）和（5.2.13）得$\theta$的反对称部分$\theta^A$的对偶

$$\Theta=-\frac{1}{2}\epsilon:\theta=\frac{1}{2}\epsilon:[\psi\otimes\delta(L)]$$
$$=\frac{1}{2}\psi\times\delta(L). \tag{5.2.24}$$

将（4.3.53）应用于（5.2.22）、(5.2.23）再次得到连续性方程

$$\alpha\nabla=-\{[\mathbf{d}+\psi\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)]\otimes\delta(L)\}\nabla$$
$$=-\psi\times\delta(L)=-2\Theta, \tag{5.2.25}$$

$$\boldsymbol{\theta}\nabla=-(\boldsymbol{\psi}\otimes\delta(L))\nabla=0. \tag{5.2.26}$$

故一般情况，$\boldsymbol{\alpha}$是有源的．位错线可以起始或终结于向错．只当$\boldsymbol{\psi}\parallel\mathbf{t}$即$\boldsymbol{\alpha}\nabla=0$，$\boldsymbol{\alpha}$才是无源的，此时是楔型向错．根据纯位错的连续性方程$\boldsymbol{\alpha}\nabla=0$，我们可以得到类似于电路中的Kirchhoff定律那样的位错线网络的守恒律．类似地，从连续性方程(5.2.25)、(5.2.26)又可得缺陷线网络的守恒律，这里就不多说了．

从(5.2.22)、(5.2.23)可看出，除了在缺陷线上之外，位错密度和向错密度处处为零．如果在回路$\varLambda$内包含若干条孤立缺陷线$L_i=\partial S_i$，则每条缺陷线上有$\mathbf{d}_i$和$\boldsymbol{\psi}_i$，如果选定一个$\mathbf{x}^0$，Frank向量和Burgers向量就等于

$$\boldsymbol{\Omega}=\sum_i\boldsymbol{\psi}_i, \tag{5.2.27}$$

$$\mathbf{b}=\sum_i(\mathbf{d}_i-\boldsymbol{\psi}_i\times\mathbf{x}^0). \tag{5.2.28}$$

容易利用上面的结果及(4.3.37)式，将Frank向量$\boldsymbol{\Omega}$、Burgers向量$\mathbf{b}$、位错密度$\boldsymbol{\alpha}$和向错密度$\boldsymbol{\theta}$在连续分布缺陷时的关系(3.3.14)、(3.3.15)，对孤立缺陷的情形进行证明．因为将(5.2.22)、(5.2.23)代入(3.3.14)和(3.3.15)的右端即得

$$-\int_\Sigma\boldsymbol{\theta}d\boldsymbol{\Sigma}=\int_\Sigma\boldsymbol{\Omega}\times\delta(L)d\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{\Omega}, \tag{5.2.29}$$

$$\begin{aligned}&-\int_\Sigma(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{x}\times\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\Sigma}\\&=\int_\Sigma[(\mathbf{b}+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x})\otimes\delta(L)+\mathbf{x}\times\boldsymbol{\Omega}\otimes\delta(L)]d\boldsymbol{\Sigma}\\&=\int_\Sigma\mathbf{b}\otimes\delta(L)d\boldsymbol{\Sigma}=\mathbf{b}.\end{aligned} \tag{5.2.30}$$

## §5.3 离散位错环和缺陷环

金相分析常观察到位错或缺陷以小片形式出现，这就是上面两节提及的孤立位错或孤立缺陷，只不过有为数众多的$S_i(i=1, 2, \cdots)$，其边界$L_i=\partial S_i$在物体内具有封闭的环(不一定是圆环)的形状，称为**位错环**(dislocation loop)或**缺陷环**(defect loop)。对于离散位错环和缺陷环(也可过渡到连续的)，我们引进另一些描述的量，并给出这些量和至今提到的量的关系。

先谈位错环。位错环$S_i$可以看作是物体内的一个截面，在法向$\mathbf{n}_i$的那一面相对另一面进行了非协调的相对位移$\mathbf{d}_i(=\mathbf{b}_i)$。由于$S_i$很小，可看作截面有唯一的$\mathbf{n}_i$。每个位错环$S_i$具有一个确定的Burgers向量$\mathbf{b}_i$。如果$\mathbf{b}_i$平行于$\mathbf{n}_i$，我们有**柱型位错环**；若$\mathbf{b}_i$垂直于$\mathbf{n}_i$，则有**滑动型位错环**。应注意这两个是位错环的整体性概念，区别于**螺型**或**刃型位错**。后两者是在位错线上一点的位错类型，在同一位错线上位错类型可随点而异，因而只是点的概念。

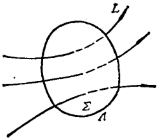



图 5-2

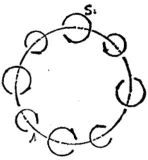



图 5-3

在§5.1中的孤立位错情形，Burgers回路比位错线回路小得多，可以看成是位错线$L$穿过Burgers回路$\Lambda$所张的曲面$\Sigma$(如图5-2)。现在由于$S_i$相当小，任取一回路$\Lambda$，它穿过一系列

位错环$S_i(i=1,2,\cdots,n)$，（见图5-3），仍按图5-1的方式定向，用（5.1.11）可以算出这回路穿过的$S_i$的$\mathbf{d}_i$的总和，它等于$\Lambda$的Burgers 向量：

$$\mathbf{b}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{b}_i=\sum_i\oint_\Lambda\mathbf{b}_i\otimes\delta(S_i)d\Lambda$$

$$=\oint_\Lambda\Big[\sum_i\mathbf{b}_i\otimes\delta(S_i)\Big]d\Lambda. \qquad (5.3.1)$$

引进$\mathbf{\Upsilon}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{b}_i\otimes\delta(S_i)$，称为**位错环密度张量**，于是

$$\mathbf{b}=\oint_\Lambda\mathbf{\Upsilon}d\Lambda=\oint_\Lambda\mathbf{\Upsilon}\mathbf{t}d\Lambda. \qquad (5.3.2)$$

公式（5.3.2）最后一个积分的被积函数$\mathbf{\Upsilon t}$是在回路$\Lambda$上单位长度线段所穿过的各位错环的 Burgers 向量之向量和，因此$\mathbf{\Upsilon}$称为位错的环密度张量，它是物质点$\mathbf{x}$的函数，且在回路$\Lambda$之外处处为零。上式又可写成

$$\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x})=\mathbf{b}(\mathbf{x})\otimes\delta(S) \qquad (5.3.3)$$

这里

$$S=\bigcup_{i=1}^{n}S_i \qquad (5.3.4)$$

是各位错环截面$S_i$的并集。

$$\mathbf{b}(\mathbf{x})=\begin{cases}\mathbf{b}_i, & 当\mathbf{x}\in S_i,\\ 0, & 当\mathbf{x}\notin S_i.\end{cases} \qquad (5.3.5)$$

作体积分并利用（4.3.28）得

$$\int_V\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x})dV=\int_V\mathbf{b}(\mathbf{x})\otimes\delta(S)dV$$

$$=\int_{S(V)}\mathbf{b}(\mathbf{x})\otimes d\mathbf{S}$$

$$=\sum_i \mathbf{b}_i\otimes\int_{S_i(V)} d\mathbf{S}_i\ , \qquad (5.3.6)$$

从而

$$\underset{V}{\mathrm{mean}}\,\boldsymbol{\Upsilon}=\frac{1}{V}\sum_i \mathbf{b}_i\otimes\int_{S_i(V)} d\mathbf{S}_i. \qquad (5.3.7)$$

它给出体积$V$的**位错平均环密度**。积分区域 $S_i(V)$ 表示只对包含在$V$内的那部分$S_i$积分。

另一方面，若令$d\boldsymbol{\Sigma}=\mathbf{N}d\Sigma$，由（5.1.8）有

$$\mathbf{b}=-\int_{\Sigma}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{N}d\Sigma=-\int_{\Sigma}\boldsymbol{\alpha}d\boldsymbol{\Sigma}, \qquad (5.3.8)$$

这里$\boldsymbol{\alpha}$也是点$\mathbf{x}$的函数，它给出该点的位错的状态，即给出过$\mathbf{x}$点的任意单位截面所穿过的位错线 $\mathbf{b}_i$ 的总和。对（5.3.2）中第一个积分应用 Stokes 公式（1.4.20）得

$$\mathbf{b}=\oint_{\Lambda}\boldsymbol{\Upsilon}d\boldsymbol{\Lambda}=-\int_{\Sigma}\boldsymbol{\Upsilon}\times\boldsymbol{\nabla}d\boldsymbol{\Sigma}. \qquad (5.3.9)$$

再与（5.3.8）比较得

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\Upsilon}\times\boldsymbol{\nabla}, \qquad (5.3.10)$$

它给出刻划位错状态的$\boldsymbol{\alpha}$和刻划位错环状态的$\boldsymbol{\Upsilon}$之间的关系。

现在讨论离散缺陷环。完全类似地，回路$\Lambda$（它穿过缺陷环$S_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$）的 Frank 向量为

$$\boldsymbol{\Omega}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\Omega}_i=\oint_{\Lambda}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\Omega}_i\otimes\delta(S_i)\,d\boldsymbol{\Lambda}$$

$$=\oint_{\Lambda}\boldsymbol{\zeta}d\boldsymbol{\Lambda}=\oint_{\Lambda}\boldsymbol{\zeta}\mathbf{t}d\Lambda, \qquad (5.3.11)$$

其中

$$\boldsymbol{\zeta}=\sum_{i=1}^{n}\Omega_i\otimes\delta(S_i) \tag{5.3.12}$$

称为**向错环密度张量**. (5.3.11) 最后一个积分的被积函数$\boldsymbol{\zeta}\mathbf{t}$给出回路$\Lambda$上单位长度穿过的缺陷环的 Frank 向量的向量和. 同样可以引进

$$\Omega(\mathbf{x})=\begin{cases}\Omega_i, & \mathbf{x}\in S_i\\ 0, & \mathbf{x}\notin S_i\end{cases} \tag{5.3.13}$$

和

$$S=\bigcup_{i=1}^{n}S_i. \tag{5.3.14}$$

于是 (5.3.12) 可写成

$$\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x})=\Omega(\mathbf{x})\otimes\delta(S) \tag{5.3.15}$$

并且有

$$\underset{V}{\text{mean}}\,\boldsymbol{\zeta}=\frac{1}{V}\sum_{i}\Omega_i\otimes\int_{S_i(V)}d\mathbf{S}_i. \tag{5.3.16}$$

各式的意义类似于位错环, 此处不再重述. 应用 Stokes 公式 (1.4.20) 于 (5.3.11) 并和 (3.3.14) 比较又得向错密度$\theta$和向错环密度$\boldsymbol{\zeta}$的关系

$$\theta=\boldsymbol{\zeta}\times\nabla. \tag{5.3.17}$$

类似于 (5.3.8), 也有

$$\Omega=-\int_{\Sigma}\theta\mathbf{N}d\Sigma, \tag{5.3.18}$$

及相应地得$\theta$的一个物理意义: $\theta$作用于曲面$\Sigma$在$\mathbf{x}$点的单位外法向量$\mathbf{N}$, 给出通过$\mathbf{x}$点的该曲面$\Sigma$单位面积的各缺陷线的Frank向量的向量和.

余下的就是对缺陷情形的位错环密度Y的讨论。让我们计算$\Lambda$穿过各$S_i$的相应点$\mathbf{x}_i$的非协调的相对弹性位移之和（用到(5.2.17)和(4.3.37)），

$$\sum_{i=1}^{n}[\mathbf{d}_i+\boldsymbol{\Omega}_i\times(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}^0)]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{b}_i+\boldsymbol{\Omega}_i\times\mathbf{x}_i)$$

$$=\mathbf{b}+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\Omega}_i\times\mathbf{x}_i$$

$$=\oint_\Lambda\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{b}_i+\boldsymbol{\Omega}_i\times\mathbf{x})\otimes\delta(S_i)d\Lambda$$

$$=\oint_\Lambda \mathbf{Y}d\Lambda, \qquad (5.3.19)$$

这里

$$\mathbf{Y}\overset{df}{=}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{b}_i+\boldsymbol{\Omega}_i\times\mathbf{x})\otimes\delta(S_i), \qquad (5.3.20)$$

或

$$\mathbf{Y}(\mathbf{x})=[\mathbf{b}(\mathbf{x})+\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x})\times\mathbf{x}]\otimes\delta(S), \qquad (5.3.21)$$

式中各量意义同(5.3.4)、(5.3.5)和(5.3.13)。利用(5.2.30)、(5.3.17)和Stokes公式可以将(5.3.19)改写为

$$\oint_\Lambda\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{\Omega}_i\times\mathbf{x})\otimes\delta(S_i)d\Lambda$$

$$=-\mathbf{b}-\int_\Sigma(\mathbf{Y}\times\nabla)d\boldsymbol{\Sigma}$$

$$=\int_{\Sigma}[\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{x}\times(\boldsymbol{\zeta}\times\nabla)-\boldsymbol{\Upsilon}\times\nabla]d\boldsymbol{\Sigma}$$

$$=\int_{\Sigma}[\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\Upsilon}\times\nabla+(\mathrm{tr}\boldsymbol{\zeta})\mathbf{I}-\boldsymbol{\zeta}^{*}]d\boldsymbol{\Sigma}$$

$$+\int_{\Sigma}(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\zeta})\times\nabla d\boldsymbol{\Sigma}, \tag{5.3.22}$$

其中用到恒等式

$$\mathbf{x}\times(\boldsymbol{\zeta}\times\nabla)=(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\zeta})\times\nabla+(\mathrm{tr}\boldsymbol{\zeta})\mathbf{I}-\boldsymbol{\zeta}^{*}. \tag{5.3.23}$$

再应用 Stokes 公式于（5.3.22）的最后一个积分，并将（5.3.12）代入得

$$\int_{\Sigma}(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\zeta})\times\nabla d\boldsymbol{\Sigma}=-\oint_{\Lambda}\mathbf{x}\times\boldsymbol{\zeta}d\boldsymbol{\Lambda}$$

$$=-\oint_{\Lambda}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}\times\boldsymbol{\Omega}_{i}\otimes\boldsymbol{\delta}(S_{i})d\boldsymbol{\Lambda}, \tag{5.3.24}$$

和（5.3.22）比较得到对任何张在$\Lambda$上的曲面$\Sigma$均成立的

$$\int_{\Sigma}[\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\Upsilon}\times\nabla+(\mathrm{tr}\boldsymbol{\zeta})\mathbf{I}-\boldsymbol{\zeta}^{*}]d\boldsymbol{\Sigma}=0. \tag{5.3.25}$$

从而，我们有在缺陷环情形位错密度$\boldsymbol{\alpha}$和位错环密度$\boldsymbol{\Upsilon}$和向错环密度$\boldsymbol{\zeta}$的关系式

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\Upsilon}\times\nabla-(\mathrm{tr}\boldsymbol{\zeta})\mathbf{I}+\boldsymbol{\zeta}^{*}. \tag{5.3.26}$$

将（5.3.17），（5.3.26）代入（5.2.30）并利用 Stokes 公式得到

$$\mathbf{b}=-\int_{\Sigma}[\boldsymbol{\Upsilon}\times\nabla-(\mathrm{tr}\boldsymbol{\zeta})\mathbf{I}+\boldsymbol{\zeta}^{*}+\mathbf{x}\times(\boldsymbol{\zeta}\times\nabla)]d\boldsymbol{\Sigma}$$

$$=-\int_{\Sigma}(\boldsymbol{\Upsilon}+\mathbf{x}\times\boldsymbol{\zeta})\times\nabla d\boldsymbol{\Sigma}$$

$$=\oint_{A}(\mathbf{Y}+\mathbf{x}\times\boldsymbol{\zeta})d\boldsymbol{\Lambda}, \qquad (5.3.27)$$

它给出$\mathbf{b}$和$\mathbf{Y}$、$\boldsymbol{\zeta}$的关系。最后我们讨论$\boldsymbol{\Xi}^P$、$\mathbf{e}^P$和$\boldsymbol{\zeta}$、$\mathbf{Y}$的关系。比较（5.3.17）和（3.3.1），（5.3.26）和（3.2.19）得：

$$(\boldsymbol{\Xi}^P+\boldsymbol{\zeta})\times\boldsymbol{\nabla}=0, \qquad (5.3.28)$$

$$(\mathbf{e}^P+\mathbf{Y})\times\boldsymbol{\nabla}-tr(\boldsymbol{\Xi}^P+\boldsymbol{\zeta})\mathbf{I}+(\boldsymbol{\Xi}^P+\boldsymbol{\zeta})^*=0. \qquad (5.3.29)$$

因为张量方程$\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\nabla}=0$的解为$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\omega}^P\otimes\boldsymbol{\nabla}$，这里$\boldsymbol{\omega}^P$可以是任意向量场（不是（不可积的）塑性转动场）。由（5.3.28）我们有

$$\boldsymbol{\Xi}^P=-\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{\omega}^P\otimes\boldsymbol{\nabla}, \qquad (5.3.30)$$

它表明$\boldsymbol{\Xi}^P$和$-\boldsymbol{\zeta}$可差一任意向量场$\boldsymbol{\omega}^P$的梯度。将上式代入（5.3.29）又有

$$(\mathbf{e}^P+\mathbf{Y})\times\boldsymbol{\nabla}-(\boldsymbol{\omega}^P\boldsymbol{\nabla})\mathbf{I}+\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\omega}^P=0. \qquad (5.3.31)$$

为了消去上式中的$\boldsymbol{\omega}^P$，我们再进行下面运算。如果在（5.3.23）中以$\boldsymbol{\omega}^P\otimes\boldsymbol{\nabla}$代替$\boldsymbol{\zeta}$，并考虑到$\boldsymbol{\omega}^P\otimes\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}=0$得

$$[\mathbf{x}\times(\boldsymbol{\omega}^P\otimes\boldsymbol{\nabla})]\times\boldsymbol{\nabla}+(\boldsymbol{\omega}^P\boldsymbol{\nabla})\mathbf{I}-\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\omega}^P=0. \qquad (5.3.32)$$

上两式相加导致

$$[\mathbf{e}^P+\mathbf{Y}+\mathbf{x}\times(\boldsymbol{\omega}^P\otimes\boldsymbol{\nabla})]\times\boldsymbol{\nabla}=0. \qquad (5.3.33)$$

于是，类似于（5.3.30）

$$\mathbf{e}^P=-\mathbf{Y}-\mathbf{x}\times(\boldsymbol{\omega}^P\otimes\boldsymbol{\nabla})+\mathbf{u}^P\otimes\boldsymbol{\nabla}, \qquad (5.3.34)$$

其中$\mathbf{u}^P$（也不是（不可积的）塑性位移场）可以是任意向量场。以$\mathbf{x}$叉乘（5.3.30）得

$$\mathbf{x}\times\boldsymbol{\Xi}^P=-\mathbf{x}\times\boldsymbol{\zeta}+\mathbf{x}\times(\boldsymbol{\omega}^P\otimes\boldsymbol{\nabla}). \qquad (5.3.35)$$

上两式相加给出

$$\mathbf{e}^P+\mathbf{x}\times\boldsymbol{\Xi}^P=-\mathbf{Y}-\mathbf{x}\times\boldsymbol{\zeta}+\mathbf{u}^P\otimes\boldsymbol{\nabla}. \qquad (5.3.36)$$

（5.3.30）和（5.3.36）给出了$\boldsymbol{\Xi}^P$、$\mathbf{e}^P$和$\boldsymbol{\zeta}$、$\mathbf{Y}$的联系。可以看到每个式子中都可以相差一个任意向量场的梯度。

## §5.4 直线位错和直线向错

本节介绍孤立直线位错和孤立直线向错作为前面介绍的孤立缺陷理论的例子。

例 1　直线位错

设在直线$L$上有一孤立位错。这一位错是由于在通过以$L$为边界的无限半平面$S$有一跳跃位移增量[u]＝b 引起的。取笛卡尔直角坐标系$x_1x_2x_3$使$x_3$轴沿直线$L$，$S$为$x_1x_3$平面上包含$x_1$之负轴的部分。指定$S$面的法向为$x_2$的负轴以符合右手螺旋法则（见图 5-4）。

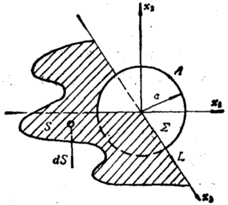



图　5-4

由(5.1.2)知此时塑性畸变是

$$\boldsymbol{\beta}^P(\mathbf{x}) = -\mathbf{b}\otimes\delta(S). \tag{5.4.1}$$

由(5.1.10)知位错密度张量为

$$\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{b}\otimes\delta(L). \tag{5.4.2}$$

写成分量形式，则不为零的分量有

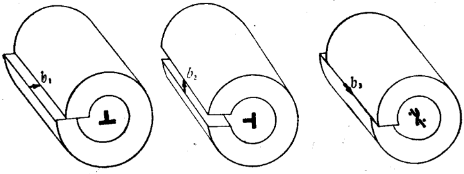
$$\beta^P_{l2} = b_l H(-x_1)\delta(x_2), \quad l=1, 2, 3. \tag{5.4.3}$$

$$\alpha_{l3} = b_l\,\delta(x_1)\,\delta(x_2), \quad l=1, 2, 3. \tag{5.4.4}$$

这里

$$H(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{5.4.5}$$

$\delta(x_1)\delta(x_2)$表示§4.2介绍过的$\delta$-函数的直积。为简单起见已省去乘号"×"（今后也这样处理）。可以看到塑性畸变除了在$S$面上以外均为零，而位错密度则集中在$x_3$轴上。下面三个图对应于**b**分别仅有一个分量不为零的三种特殊情况。




(a) 仅有密度 $\alpha_{13}=b_1\delta(x_1)\delta(x_2)$ 的刃型位错　(b) 仅有密度 $\alpha_{23}=b_2\delta(x_1)\delta(x_2)$ 的刃型位错　(c) 仅有密度 $\alpha_{33}=b_3\delta(x_1)\delta(x_2)$ 的螺型位错

图 5-5

当$b_2=b_3=0$，而$b_1\neq 0$，这时位错可看成是由于由$S$面分开的上下部分沿$x_1$方向产生相对移动而形成的刃型位错。由Burgers向量**b**和位错线所张成的平面叫**滑移面**。因此，$S$面是滑移面。

当$b_1=b_3=0$，而$b_2\neq 0$，这时位错可看成是由于由$S$面分开的上下两部分沿$x_2$方向产生相对移动而形成的，它也是刃型位错。

当$b_1=b_2=0$而$b_3\neq 0$，位错是由于由$S$分开的上下两部分沿$x_3$方向产生相对移动而形成的。由于Burgers向量与位错线平行，这是螺型位错。$S$面是滑移面。实际上，此时过$L$的任意平面都可看作滑移面。因此螺型直线位错有无数多个滑移面。

我们看到，在本例中位错密度张量$\boldsymbol{\alpha}$是满足连续性方程

(5.1.14)的：

$$\alpha_{ij,j}=0。\quad (5.4.6)$$

如果取在 $x_1x_2$ 平面上以原点为中心、半径为 $a$ 的圆作为 Burgers 回路 $\Lambda$（见图5-4），那么，我们有

$$-\oint_\Lambda \beta^P_{ij}\,dL_j=-\oint_\Lambda b_iH(-x_1)\delta(x_2)dL_2=b_i,\quad (5.4.7)$$

$$\int_\Sigma \alpha_{ij}dS_j=\int_\Sigma b_i\delta(x_1)\delta(x_2)dx_1dx_2=b_i。\quad (5.4.8)$$

这和(5.1.5)是一致的。同样可将(3.1.1)式应用于求孤立位错的不协调度张量，在本例中不协调度张量不为零的分量为

$$\left.\begin{aligned}
\eta_{31}&=-\frac{1}{2}b_3\delta(x_1)\delta'(x_2),\\
\eta_{32}&=\frac{1}{2}b_3\delta'(x_1)\delta(x_2),\\
\eta_{33}&=b_1\delta(x_1)\delta'(x_2)-b_2\delta'(x_1)\delta(x_2)。
\end{aligned}\right\}\quad (5.4.9)$$

这里已出现 $\delta$-函数的导数。它是按（4.2.6）定义的。易见这些分量也服从连续性方程（(3.1.2)式）：

$$\eta_{ij,j}=0。\quad (5.4.10)$$

如果我们只讨论无体力的各向同性无界物质，它满足平衡方程

$$\boldsymbol{\sigma}\nabla=0\quad (5.4.11)$$

和广义虎克定律

$$\boldsymbol{\sigma}=2G\left(\mathbf{e}+\frac{\nu}{1-2\nu}\mathrm{tr}\,\mathbf{e}\,\mathbf{I}\right),\quad (5.4.12)$$

这里 $G$ 是拉梅系数，$\nu$ 是泊松比。我们可以计算出直线位错相应的弹性场。运算表明，总位移 $\mathbf{u}^T$ 所满足的偏微分方程（3.1.8）此时变为

$$u^T_{i,jj}+\frac{1}{1-2\nu}u^T_{j,ij}=2e^P_{ij,j}+\frac{2\nu}{1-2\nu}e^P_{jj,i}。\quad (5.4.13)$$

对$x_i$微分上式得

$$\frac{1-\nu}{1-2\nu}u^T_{i,ijj}=e^P_{ij,ij}+\frac{\nu}{1-2\nu}e^P_{ii,jj}. \tag{5.4.14}$$

加拉普拉斯算子于(5.4.13)式两边又得到

$$u^T_{i,jjkk}+\frac{1}{1-2\nu}u^T_{j,ijkk}=2e^P_{ij,jkk}+\frac{2\nu}{1-2\nu}e^P_{jj,ikk}. \tag{5.4.15}$$

联合(5.4.14)和(5.4.15)式得到

$$u^T_{i,jjkk}=2e^P_{ij,jkk}-\frac{1}{1-\nu}e^P_{jk,ijk}+\frac{\nu}{1-2\nu}e^P_{jj,ikk}. \tag{5.4.16}$$

另外，由(4.3.2)式我们有

$$u^T_i(\mathbf{x})=\int_V\delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x})u^T_i(\mathbf{x}')dV', \tag{5.4.17}$$

将恒等式（参见(4.2.11)）

$$\frac{1}{8\pi}|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|_{,jjkk}+\delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x})=0 \tag{5.4.18}$$

代入(5.4.17)经多次分部积分得到：

$$u^T_i(\mathbf{x})=-\frac{1}{8\pi}\int_V|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|_{,j'j'k'k'}u^T_i(\mathbf{x}')dV'$$

$$=-\frac{1}{8\pi}\int_V|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|u^T_{i,j'j'k'k'}(\mathbf{x}')dV', \tag{5.4.19}$$

这里带撇号的下标$j'$等表示对积分变量的微分。为了保证面积分在无穷远处等于零，已要求：〈1〉当$R\equiv|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|\to\infty$，$u^T_i(R)\to 0$。〈2〉当$R\to\infty$，$e^P_{ij}(R)$比$R^{-1}$更快地趋于零。将(5.4.16)代入(5.4.19)式并经过多次分部积分后得到

$$u^T_i(\mathbf{x})=-\frac{1}{8\pi}\int R\Big[2e^P_{ij,j'k'k'}(\mathbf{x}')-\frac{1}{1-\nu}e^P_{jk,i'j'k'}(\mathbf{x}')$$

$$+\frac{\nu}{1-2\nu}e^{p}_{ij,i'k'k'}(\mathbf{x}')\Big]dV'$$

$$=\frac{1}{8\pi}\iint\Big[2R_{,j'k'k'}e^{p}_{ij}(\mathbf{x}')-\frac{1}{1-\nu}R_{,i'j'k'}e^{p}_{jk}(\mathbf{x}')$$

$$+\frac{\nu}{1-2\nu}R_{,i'j'j'}e^{p}_{kk}(\mathbf{x}')\Big]dV'. \qquad (5.4.20)$$

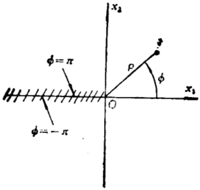



图 5-6

如果我们如图5-6那样取极坐标使得$\phi$是单值的，然而在$S$面上有间断$[\phi]=2\pi$，将(5.4.3)的对称部分$e^{p}_{ij}$代入(5.4.20)经计算得

$$\left.\begin{aligned}
u_1^T&=b_1\left[\frac{\phi}{2\pi}+\frac{x_1x_2}{4\pi(1-\nu)\rho^2}\right]\\
&\quad+\frac{b_2}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\ln\rho+\frac{x_2^2}{\rho^2}\right],\\
u_2^T&=-\frac{b_1}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\ln\rho+\frac{x_1^2}{\rho^2}\right]\\
&\quad+\frac{b_2}{2\pi}\left[\phi-\frac{x_1x_2}{2(1-\nu)\rho^2}\right],\\
u_3^T&=\frac{b_3\phi}{2\pi}.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.4.21)$$

应注意由于我们的角度$\phi$的选法，式中包含$\phi$的项正好反映了在$S$面上位移的跳跃．由 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^T-\boldsymbol{\beta}^P=\mathbf{u}^T\otimes\boldsymbol{\nabla}-\boldsymbol{\beta}^P$ 经计算（注意求导数是在广义函数的意义下进行的）得到

$$
\left.\begin{aligned}
\beta_{11}&=-\frac{b_1}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{x_2}{\rho^2}+2\frac{x_1^2x_2}{\rho^4}\right]\\
&\quad+\frac{b_2}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{x_1}{\rho^2}-\frac{x_1x_2^2}{\rho^4}\right],\\
\beta_{12}&=\frac{b_1}{4\pi(1-\nu)}\left[(3-2\nu)\frac{x_1}{\rho^2}-2\frac{x_1x_2^2}{\rho^4}\right]\\
&\quad+\frac{b_2}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{x_2}{\rho^2}+2\frac{x_1^2x_2}{\rho^4}\right],\\
\beta_{13}&=0,\\
\beta_{21}&=-\frac{b_1}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{x_1}{\rho^2}+2\frac{x_1x_2^2}{\rho^4}\right]\\
&\quad-\frac{b_2}{4\pi(1-\nu)}\left[(3-2\nu)\frac{x_2}{\rho^2}-2\frac{x_1^2x_2}{\rho^4}\right],\\
\beta_{22}&=-\frac{b_1}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{x_2}{\rho^2}-2\frac{x_1^2x_2}{\rho^4}\right]\\
&\quad+\frac{b_2}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{x_1}{\rho^2}+2\frac{x_1x_2^2}{\rho^4}\right],\\
\beta_{23}&=0,\\
\beta_{31}&=-\frac{b_3x_2}{2\pi\rho^2},\\
\beta_{32}&=\frac{b_3x_1}{2\pi\rho^2},\\
\beta_{33}&=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(5.4\ 22)
$$

弹性应变为：

$$
\left.\begin{aligned}
&e_{11}=\beta_{11},\\
&e_{22}=\beta_{22},\\
&e_{12}=\frac{b_1}{4\pi(1-\nu)}\left[\frac{x_1}{\rho^2}-2\frac{x_1x_2^2}{\rho^4}\right]\\
&\qquad-\frac{b_2}{4\pi(1-\nu)}\left[\frac{x_2}{\rho^2}-2\frac{x_1^2x_2}{\rho^4}\right],\\
&e_{23}=\frac{b_3x_1}{4\pi\rho^2},\\
&e_{31}=-\frac{b_3x_2}{4\pi\rho^2},\\
&e_{33}=0.
\end{aligned}\right\}\tag{5.4.23}
$$

代入广义虎克定律(5.4.12)最后得到直线位错的应力场是

$$
\left.\begin{aligned}
&\sigma_{11}=-\frac{Gb_1}{2\pi(1-\nu)}\left[\frac{x_2}{\rho^2}+2\frac{x_1^2x_2}{\rho^4}\right]\\
&\qquad+\frac{Gb_2}{2\pi(1-\nu)}\left[\frac{x_1}{\rho^2}-2\frac{x_1x_2^2}{\rho^4}\right],\\
&\sigma_{22}=-\frac{Gb_1}{2\pi(1-\nu)}\left[\frac{x_2}{\rho^2}-2\frac{x_1^2x_2}{\rho^4}\right]\\
&\qquad+\frac{Gb_2}{2\pi(1-\nu)}\left[\frac{x_1}{\rho^2}+2\frac{x_1x_2^2}{\rho^4}\right],\\
&\sigma_{33}=-\frac{G\nu}{2\pi(1-\nu)}\left[2\frac{b_1x_2}{\rho^2}-2\frac{b_2x_1}{\rho^2}\right],\\
&\sigma_{12}=\frac{Gb_1}{2\pi(1-\nu)}\left[\frac{x_1}{\rho^2}-2\frac{x_1x_2^2}{\rho^4}\right]\\
&\qquad-\frac{Gb_2}{2\pi(1-\nu)}\left[\frac{x_2}{\rho^2}-2\frac{x_1^2x_2}{\rho^4}\right],\\
&\sigma_{23}=\frac{Gb_3x_1}{2\pi\rho^2},\ \sigma_{31}=-\frac{Gb_3x_2}{2\pi\rho^2}.
\end{aligned}\right\}\tag{5.4.24}
$$

可以验证弹性畸变(5.4.22)将满足基本几何法则(3.2.5)，而应力场(5.4.24)满足无体力的平衡方程(5.4.11)。和塑性畸变$\beta^P$不同，弹性畸变和应力场除了位错线之外处处连续可微。最后我们还可以得到弹性转动向量为

$$\left.\begin{aligned}\omega_1&=\frac{b_3x_1}{4\pi\rho^2},\\ \omega_2&=\frac{b_3x_2}{4\pi\rho^2},\\ \omega_3&=-\frac{b_1x_1}{2\pi\rho^2}-\frac{b_2x_2}{2\pi\rho^2}.\end{aligned}\right\}\tag{5.4.25}$$

**例 2** 直线缺陷（向错）

我们再讨论在直线$L$上的向错，仍然像图5-4那样选取笛卡尔直角坐标系$x_1x_2x_3$，为简单起见，设(5.2.1)式中$\mathbf{d}=0$，$\mathbf{x}^0=0$，即向错轴通过原点。此时 Frank 向量$\boldsymbol{\Omega}$等于相对转动向量$\boldsymbol{\psi}$，而 Burgers 向量$\mathbf{b}=0$。由(5.2.4)，$\mathring{\boldsymbol{\beta}}$不为零的分量为

$$\left.\begin{aligned}&\mathring{\beta}_{12}=\Omega_2x_3H(-x_1)\delta(x_2),\\ &\mathring{\beta}_{22}=(\Omega_3x_1-\Omega_1x_3)H(-x_1)\delta(x_2),\\ &\mathring{\beta}_{32}=-\Omega_2x_1H(-x_1)\delta(x_2).\end{aligned}\right\}\tag{5.4.26}$$

$\mathring{\boldsymbol{\phi}}$的不为零的分量为

$$\left.\begin{aligned}&\mathring{\phi}_{12}=\Omega_1H(-x_1)\delta(x_2),\\ &\mathring{\phi}_{22}=\Omega_2H(-x_1)\delta(x_2),\\ &\mathring{\phi}_{32}=\Omega_3H(-x_1)\delta(x_2).\end{aligned}\right\}\tag{5.4.27}$$

于是由(5.2.6)和(5.2.7)，非零的塑性应变和塑性弯扭分量分别是：

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{12}^{P} &= \frac{1}{2}\Omega_2 x_3 H(-x_1)\delta(x_2),\\
\varepsilon_{22}^{P} &= (\Omega_3 x_1 - \Omega_1 x_3) H(-x_1)\delta(x_2),\\
\varepsilon_{23}^{P} &= -\frac{1}{2}\Omega_2 x_1 H(-x_1)\delta(x_2);
\end{aligned}\right\}\tag{5.4.28}
$$

和

$$
\left.\begin{aligned}
\Xi_{11}^{P} &= -\frac{1}{2}\Omega_2 H(-x_1)\delta(x_2),\\
\Xi_{12}^{P} &= -\frac{1}{2}\Omega_2 x_1 H(-x_1)\delta'(x_2)\\
&\qquad +\Omega_1 H(-x_1)\delta(x_2),\\
\Xi_{22}^{P} &= \Omega_2 H(-x_1)\delta(x_2),\\
\Xi_{31}^{P} &= \frac{1}{2}\Omega_2 x_3 \delta(x_1)\delta(x_2),\\
\Xi_{32}^{P} &= -\frac{1}{2}\Omega_2 x_3 H(-x_1)\delta'(x_2)\\
&\qquad +\Omega_3 H(-x_1)\delta(x_2),\\
\Xi_{33}^{P} &= -\frac{1}{2}\Omega_2 H(-x_1)\delta(x_2).
\end{aligned}\right\}\tag{5.4.29}
$$

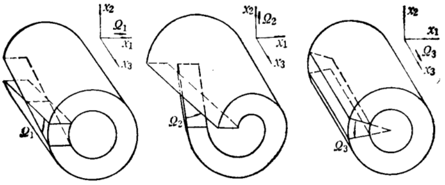
由(5.2.21)和(5.2.22)位错密度张量和向错密度张量不为零的分量分别是：

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha_{13} &= \Omega_2 x_3 \delta(x_1)\delta(x_2),\\
\alpha_{23} &= -\Omega_1 x_3 \delta(x_1)\delta(x_2);
\end{aligned}\right\}\tag{5.4.30}
$$

和

$$
\left.\begin{aligned}
\theta_{13} &= \Omega_1 \delta(x_1)\delta(x_2),\\
\theta_{23} &= \Omega_2 \delta(x_1)\delta(x_2),\\
\theta_{33} &= \Omega_3 \delta(x_1)\delta(x_2).
\end{aligned}\right\}\tag{5.4.31}
$$

可见，缺陷密度集中于$x_3$轴。同样我们有Ω中仅有一个分量不为零的三种特殊情况（图5-7）：




(a)$\Omega_2=\Omega_3=0$　　(b)$\Omega_1=\Omega_3=0$　　(c)$\Omega_1=\Omega_2=0$

图 5-7

当$\Omega_2=\Omega_3=0$，$\Omega_1\neq0$，此时$\alpha_{23}$，$\theta_{13}$不为零。因为$\Omega\perp t$，是图5-7(a)所示的扭型向错；

当$\Omega_1=\Omega_3=0$，$\Omega_2\neq0$，此时仅有$\theta_{23}$和$\alpha_{13}$不为零，且$\Omega\perp t$，是图5-7(b)所示的扭型向错；

当$\Omega_1=\Omega_2=0$，$\Omega_3\neq0$，此时仅有$\theta_{33}$不为零，因为$\Omega\parallel t$，是图5-7(c)所示的楔型向错。

易验证，在本例中，α和θ确实满足连续性方程(5.2.24)和(5.2.25)。此时，一般地α是有源的。仅当$\Omega\parallel t$，即在图5-7(c)的楔型向错的情况，α才是无源的。

类似于例1，对无体力的各向同性无界物质，可以求出总位移为

$$
\begin{aligned}
u_1^T=&-\frac{\Omega_1x_3}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\ln\rho+\frac{x_2^2}{\rho^2}\right]\\
&+\Omega_2x_3\left[\frac{\phi}{2\pi}+\frac{x_1x_2}{4\pi(1-\nu)\rho^2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&-\Omega_3\left[\frac{x_2\phi}{2\pi}-\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)}x_1(\ln\rho-1)\right],\\
u_2^T=&-\Omega_1x_3\left[\frac{\phi}{2\pi}-\frac{x_1x_2}{4\pi(1-\nu)\rho^2}\right]\\
&-\frac{\Omega_2x_3}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\ln\rho+\frac{x_1^2}{\rho^2}\right]\\
&+\Omega_3\left[\frac{x_1\phi}{2\pi}+\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)}x_2(\ln\rho-1)\right],\\
u_3^T=&\,\Omega_1\left[\frac{x_2\phi}{2\pi}-\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)}x_1(\ln\rho-1)\right]\\
&-\Omega_2\left[\frac{x_1\phi}{2\pi}+\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)}x_2(\ln\rho-1)\right].
\end{aligned}\right\}\quad(5.4.32)
$$

其中由于极坐标系$\phi$和$\rho$的特殊选法，使包含$\phi$的项正好反映了在$S$面上的位移的跳跃。

对(5.4.32)微分得到总畸变为

$$
\left.\begin{aligned}
\beta_{11}^T=&-\frac{\Omega_1x_3}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{x_1}{\rho^2}-2\frac{x_1x_2^2}{\rho^4}\right]\\
&-\frac{\Omega_2x_3}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{x_2}{\rho^2}+2\frac{x_1^2x_2}{\rho^4}\right]\\
&+\frac{\Omega_3}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\ln\rho+\frac{x_2^2}{\rho^2}\right],\\
\beta_{12}^T=&-\frac{\Omega_1x_3}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{x_2}{\rho^2}+2\frac{x_1^2x_2}{\rho^4}\right]\\
&+\frac{\Omega_2x_3}{4\pi(1-\nu)}\left[(3-2\nu)\frac{x_1}{\rho^2}-2\frac{x_1x_2^2}{\rho^4}\right]\\
&+\Omega_2x_3H(-x_1)\delta(x_2)\\
&-\Omega_3\left[\frac{\phi}{2\pi}+\frac{x_1x_2}{4\pi(1-\nu)\rho^2}\right],
\end{aligned}\right|
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\beta^T_{13} &= -\frac{\Omega_1}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\ln\rho+\frac{x_2^2}{\rho^2}\right] \\
&\quad +\Omega_2\left[\frac{\phi}{2\pi}+\frac{x_1x_1}{4\pi(1-\nu)\rho^2}\right], \\
\beta^T_{21} &= \frac{\Omega_1 x_3}{4\pi(1-\nu)}\left[(3-2\nu)\frac{x_2}{\rho^2}-2\frac{x_1^2x_2}{\rho^4}\right] \\
&\quad -\frac{\Omega_2 x_3}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{x_1}{\rho^2}+2\frac{x_1x_2^2}{\rho^4}\right] \\
&\quad +\Omega_3\left[\frac{\phi}{2\pi}-\frac{x_1x_2}{4\pi(1-\nu)\rho^2}\right], \\
\beta^T_{22} &= -\frac{\Omega_1 x_3}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{x_1}{\rho^2}+2\frac{x_1x_2^2}{\rho^4}\right] \\
&\quad -\Omega_1 x_3 H(-x_1)\delta(x_2) \\
&\quad -\frac{\Omega_2 x_3}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{x_2}{\rho^2}-2\frac{x_1^2x_2}{\rho^4}\right] \\
&\quad +\frac{\Omega_3}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\ln\rho+\frac{x_1^2}{\rho^2}\right] \\
&\quad +\Omega_3 x_1 H(-x_1)\delta(x_2), \\
\beta^T_{23} &= -\Omega_1\left[\frac{\phi}{2\pi}-\frac{x_1x_2}{4\pi(1-\nu)\rho^2}\right] \\
&\quad -\frac{\Omega_2}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\ln\rho+\frac{x_1^2}{\rho^2}\right], \\
\beta^T_{31} &= -\frac{\Omega_1}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\ln\rho+\frac{x_2^2}{\rho^2}\right] \\
&\quad -\Omega_2\left[\frac{\phi}{2\pi}-\frac{x_1x_2}{4\pi(1-\nu)\rho^2}\right], \\
\beta^T_{32} &= \Omega_1\left[\frac{\phi}{2\pi}+\frac{x_1x_2}{4\pi(1-\nu)\rho^2}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (5.4.33)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&-\frac{\Omega_2}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\ln\rho+\frac{x_2^2}{\rho^2}\right] \\
&-\Omega_2 x_1 H(-x_1)\delta(x_2), \\
\beta^T_{33}&=0。
\end{aligned}\right\}
$$

由 $\mathbf{e}=\mathbf{e}^T-\mathbf{e}^P=\boldsymbol{\beta}^{TS}-\mathbf{e}^P$ 得到弹性应变是

$$
\left.\begin{aligned}
e_{11}=&-\frac{\Omega_1 x_3}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{x_1}{\rho^2}-2\frac{x_1 x_2^2}{\rho^4}\right] \\
&-\frac{\Omega_2 x_3}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{x_2}{\rho^2}+2\frac{x_1^2 x_2}{\rho^4}\right] \\
&+\frac{\Omega_3}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\ln\rho+\frac{x_2^2}{\rho^2}\right], \\
e_{22}=&-\frac{\Omega_1 x_3}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{x_1}{\rho^2}+2\frac{x_1 x_2^2}{\rho^4}\right] \\
&-\frac{\Omega_2 x_3}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{x_2}{\rho^2}-2\frac{x_1^2 x_2}{\rho^4}\right] \\
&+\frac{\Omega_3}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\ln\rho+\frac{x_1^2}{\rho^2}\right], \\
e_{33}=&0, \\
e_{12}=&\frac{\Omega_1 x_3}{4\pi(1-\nu)}\left[\frac{x_2}{\rho^2}-2\frac{x_1^2 x_2}{\rho^4}\right] \\
&+\frac{\Omega_2 x_3}{4\pi(1-\nu)}\left[\frac{x_1}{\rho^2}-2\frac{x_1 x_2^2}{\rho^4}\right]-\frac{\Omega_3 x_1 x_2}{4\pi(1-\nu)\rho^2}, \\
e_{31}=&-\frac{\Omega_1}{4\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\ln\rho+\frac{x_2^2}{\rho^2}\right] \\
&+\frac{\Omega_2 x_1 x_2}{4\pi(1-\nu)\rho^2}, \\
e_{23}=&\frac{\Omega_1 x_1 x_2}{4\pi(1-\nu)\rho^2}-\frac{\Omega_2}{4\pi(1-\nu)}
\end{aligned}\right\} \quad (5.4.34)
$$

$$\cdot\left[(1-2\nu)\ln\rho+\frac{x_1^2}{\rho^2}\right].$$

代入广义虎克定律(5.4.12)得到应力分量：

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11}=&\frac{G}{2\pi(1-\nu)\rho^4}\Big\{-\Omega_1x_3(x_1\rho^2-2x_1x_2^2)\\
&-\Omega_2x_3(x_2\rho^2+2x_1^2x_2)\\
&+\Omega_3\Big(\rho^4\ln\rho+\rho^2x_2^2+\frac{\nu}{1-2\nu}\rho^4\Big)\Big\},\\
\sigma_{22}=&\frac{G}{2\pi(1-\nu)\rho^4}\Big\{-\Omega_2x_3(x_2\rho^2-2x_1^2x_2)\\
&-\Omega_1x_3(x_1\rho^2+2x_1x_2^2)\\
&+\Omega_3\Big(\rho^4\ln\rho+\rho^2x_1^2+\frac{\nu}{1-2\nu}\rho^4\Big)\Big\},\\
\sigma_{33}=&\frac{G}{2\pi(1-\nu)\rho^2}\Big\{-\nu x_3(\Omega_1x_1+\Omega_2x_2)\\
&+\Omega_3\Big(2\nu\rho^2\ln\rho+\frac{\nu}{1-2\nu}\rho^2\Big)\Big\},\\
\sigma_{12}=&\frac{G}{2\pi(1-\nu)\rho^4}\Big\{\Omega_1x_3(x_2\rho^2-2x_1^2x_2)\\
&+\Omega_2x_3(x_1\rho^2-2x_1x_2^2)-\Omega_3x_1x_2\rho^2\Big\},\\
\sigma_{23}=&\frac{G}{2\pi(1-\nu)\rho^2}\Big\{\Omega_1x_1x_2\\
&-\Omega_2(1-2\nu)\rho^2\ln\rho-\Omega_2x_1^2\Big\},\\
\sigma_{31}=&\frac{G}{2\pi(1-\nu)\rho^2}\Big\{-\Omega_1(1-2\nu)\rho^2\ln\rho\\
&-\Omega_1x_2^2+\Omega_2x_1x_2\Big\}.
\end{aligned}\right\}\quad(5.4.35)$$

容易验证这些应力分量确实满足无体力的平衡方程(5.4.11)。注意到在这一例子中弹性应变和应力场也与塑性畸变不同，它们在向错线以外是处处连续可微的。

我们还可进一步求得总转动向量

$$\left.\begin{aligned}
\omega_1^T &= \frac{\Omega_1\phi}{2\pi} - \frac{1}{2}\Omega_2 x_1 H(-x_1)\delta(x_2), \\
\omega_2^T &= \frac{\Omega_2\phi}{2\pi}, \\
\omega_3^T &= \frac{\Omega_1 x_2 x_3}{2\pi\rho^2} - \frac{\Omega_2 x_1 x_3}{2\pi\rho^2} \\
&\quad - \frac{1}{2}\Omega_2 x_3 H(-x_1)\delta(x_2) + \frac{\Omega_3\phi}{2\pi},
\end{aligned}\right\} \tag{5.4.36}$$

和弹性弯扭的非零分量为

$$\left.\begin{aligned}
\Xi_{11} &= -\frac{\Omega_1 x_2}{2\pi\rho^2}, \\
\Xi_{12} &= \frac{\Omega_1 x_1}{2\pi\rho^2}, \\
\Xi_{21} &= -\frac{\Omega_2 x_2}{2\pi\rho^2}, \\
\Xi_{22} &= \frac{\Omega_2 x_1}{2\pi\rho^2}, \\
\Xi_{31} &= -\frac{\Omega_1 x_1 x_2 x_3}{\pi\rho^4} - \frac{\Omega_2 x_3}{2\pi}\left[\frac{1}{\rho^2}\right. \\
&\quad \left. -2\frac{x_1^2}{\rho^4} + \pi\delta(\rho)\right] - \frac{\Omega_3 x_2}{2\pi\rho^2}, \\
\Xi_{32} &= \frac{\Omega_1 x_3}{2\pi}\left[\frac{1}{\rho^2} - 2\frac{x_2^2}{\rho^4} + \pi\delta(\rho)\right] \\
&\quad + \frac{\Omega_2 x_1 x_2 x_3}{\pi\rho^4} + \frac{\Omega_3 x_1}{2\pi\rho^2}, \\
\Xi_{33} &= \frac{\Omega_1 x_2}{2\pi\rho^2} - \frac{\Omega_2 x_1}{2\pi\rho^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.4.37}$$

可以验证弹性场(5.4.34)、(5.4.37)和缺陷密度(5.4.30)、(5.4.31)间满足基本几何法则(3.2.23)和(3.2.24)。

应该注意，上面计算都是在无限均匀介质中进行的，如果在有限物体内，则要考虑由物体边界产生的影响。其次，所有求导运算都应按广义函数的规则进行。最后，计算中采用线弹性理论，这还有一个附加的线弹性的要求，即应变应是足够小的。注意到当$\rho\to 0$，由(5.4.23)或(5.4.34)表示的应变都趋于$\infty$。因此，应存在一个$\rho_0$，它规定线弹性可应用的范围。在$\rho>\rho_0$以外区域的材料是可以用上述办法处理的。但是在$\rho<\rho_0$的圆柱体内，则必须用其它模型，例如原子模型来计算了。

# 第六章　位错的运动

## §6.1　位错的滑移和攀移

在适当的能量条件下，一个直位错可以沿着除位错线方向本身以外的任意方向运动。为简单起见，我们以直线位错为例，且先讨论简单型式的位错：刃型位错和螺型位错，一个刃型直线位错的位错线与它的Burgers向量互相垂直。位错线与Burgers向量所张成的平面叫做滑移面。一个刃型位错的运动称为**滑移运动**，如果位错运动速度是包含在滑移面内的。位错的滑移过程中没有物质迁移，只是在运动位错的后面的原子依次重新排列。位错的另一种基本运动形式叫**攀移**。这时位错的速度是垂直于滑移面的。攀移是通过物质迁移即原子扩散而实现的。在切应力下位错的滑移是比较容易产生的，而原子扩散的攀移运动是比较困难的。

螺型位错的位错线和它的Burgers向量相平行。因此，在直线螺型位错的情形，滑移面是不能唯一确定的。换句话说，螺型位错不象刃型位错那样只有一个滑移面，而是存在无数多个滑移面。任一个过位错线的平面都可以作为螺型位错的滑移面。因此，螺型位错线可以保持平行于它的Burgers向量而作任意移动。纯螺型位错的运动总是滑移运动，在垂直于螺型位错线的晶面上则可留下任何形状的滑移痕迹。这也说明它们比刃型位错更为易动。当然，不论刃型位错或螺型位错，由于它们在晶体内的滑移而在晶体外表面做成的永久变形则是相像的。

位错的运动可能导致晶体体积的改变。设位错线元向量$d\mathbf{S}$在

作移动$d\mathbf{l}$之后，扫出一个面积$d\mathbf{A}$

$$d\mathbf{A}=d\mathbf{S}\times d\mathbf{l}=dA\mathbf{n}, \tag{6.1.1}$$

这里$\mathbf{n}$是$d\mathbf{A}$面上的法向单位向量。位错的运动所引起的晶体的体积改变为

$$\Delta V=dA\mathbf{n}\mathbf{b}. \tag{6.1.2}$$

当不引起体积改变时位错的运动称为**守恒性运动**，而引起体积改变的运动称为**非守恒性运动**。易见，对螺型直位错，由于$d\mathbf{S}\parallel\mathbf{b}$，恒有

$$\Delta V=dA\mathbf{n}\mathbf{b}=(d\mathbf{S}\times d\mathbf{l})\mathbf{b}=0. \tag{6.1.3}$$

因此，纯螺型直位错的任何运动都是守恒性运动，它不会引起体积的改变。一般地，守恒运动的必要条件是$\mathbf{n}\mathbf{b}=0$，亦即位错元在它本身与Burgers向量$\mathbf{b}$所决定的平面上运动时，位错的运动是守恒的。位错的守恒性运动亦即前面提到的位错的滑移运动。而位错的攀移运动是非守恒性的，它将引起体积的变化。

一般地，我们设空间有一个任意形状的位错环，它的每个线元的方向可以是彼此不同的。每个线元$d\mathbf{S}$都有一个由$d\mathbf{S}$和它的Burgers向量$\mathbf{b}$张成的特殊的滑移面。如果各处的Burgers向量是一样的，那么，这些滑移面合起来成为以Burgers向量为母线、位错环本身为基线所展成的一个柱面$\Sigma$（如图6-1所示）。当然，如果位错环正好落在平行于$\mathbf{b}$的平面内，$\Sigma$退化为平面。现在位错环能在这个柱面$\Sigma$上作滑移运动。尽管位错环在这个运动中可以改变形状，但运动是守恒性的。如果运动中位错环离开了这个

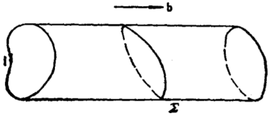



图 6-1

柱面，则晶体的体积将有所改变，位错的运动变为非守恒性的了。这时位错环的运动将包含攀移运动。

我们在稍后将看到，位错有非常小的等效惯量。因此，一旦外力作用超过产生滑移所需的最小值（阈值），位错的运动速度将急剧增加直至外力与种种耗散力学机制产生的约束力间处于动力学平衡，加速的时间比起位错在障碍之间自由运动的时间要小四～五个数量级。因此，位错的运动可以认为主要是匀速的。下面我们将只处理匀速运动的位错，对加速运动位错的情况请参阅有关文献。

## §6.2 在各向同性介质中匀速运动的位错

对在各向同性介质中作匀速运动的位错的弹性场的研究早在30多年前已经开始，Frank 和 Eshelby 分别考虑了匀速运动的刃型位错和螺型位错。而Nabarro 提出了研究在运动中改变形状的位错环的运动的一般方法。

首先我们考虑在一无限的各向同性弹性介质中匀速运动的螺型直位错。设该各向同性弹性介质满足广义虎克定律

$$\boldsymbol{\sigma}=\lambda \operatorname{tr}\mathbf{e}\mathbf{I}+2\mu\mathbf{e}, \tag{6.2.1}$$

其中$\lambda$，$\mu$为拉梅系数，

$$\mathbf{e}=\frac{1}{2}(\mathbf{u}\otimes\nabla+\nabla\otimes\mathbf{u}) \tag{6.2.2}$$

是小应变张量。由弹性力学的一般理论知在无体力存在的情况位错的位移场应满足下列运动方程：

$$\mu\nabla^2\mathbf{u}+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\mathbf{u})=\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}. \tag{6.2.3}$$

选取笛卡尔直角坐标系（$x_1,x_2,x_3$）使$x_3$轴沿位错线的方向，$x_1$轴沿位错速度向量$\mathbf{v}$。因为位移向量必有形式$\mathbf{u}=(0,0,u_3)$，这里

$u_3$只依赖于$x_1$、$x_2$和$t$，我们看到（6.2.3）中前两个方程自然满足，而第三个方程退化为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{1}{c_t^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right)u_3=0, \tag{6.2.4}$$

这里$c_t\equiv(\mu/\rho)^{\frac{1}{2}}$正是弹性横波的波速。

这样的方程与电磁波传播方程类似，它的解可以应用洛伦兹变换求出。

作变量替换

$$\begin{cases} x_1'=(x_1-vt)/\gamma_t \\ x_2'=x_2 \\ x_3'=x_3 \\ t'=(t-vx_1/c_t^2)/\gamma_t \end{cases} \tag{6.2.5}$$

这里$v$（常数）是位错的速度，$\gamma_t\equiv(1-v^2/c_t^2)^{\frac{1}{2}}$。代入(6.2.4)即得到

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1'^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2'^2}=0, \tag{6.2.6}$$

它和静态位错所满足的方程相似。套用静态位错的解，我们得到以速度 $\mathbf{v}$ 作等速运动的位错的位移场（参见(5.4.21)，此时$b_1=b_2=0$，$b_3=-b$）：

$$u_3=-\frac{b\theta'}{2\pi}, \qquad -\pi\leqslant\theta'\leqslant\pi, \tag{6.2.7}$$

其中

$$\theta'=\begin{cases} \mathrm{ctg}^{-1}\dfrac{x_1-vt}{\gamma_t x_2}, & \text{当}\, x_2>0, \\ 0, & \text{当}\, x_2=0\,\text{且}\, x_1>vt, \\ \mathrm{ctg}^{-1}\dfrac{x_1-vt}{\gamma_t x_2}-\pi, & \text{当}\, x_2<0. \end{cases} \tag{6.2.8}$$

将上结果代入(6.2.2)和(6.2.1)得到不为零的应力分量为（参见(5.4.24))：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{13}&=\frac{\mu b}{2\pi}\frac{\gamma_t x_2}{(x_1-vt)^2+\gamma_t^2 x_2^2},\\ \sigma_{23}&=-\frac{\mu b}{2\pi}\frac{\gamma_t(x_1-vt)}{(x_1-vt)^2+\gamma_t^2 x_2^2}.\end{aligned}\right\}\tag{6.2.9}$$

每单位长度位错的弹性能等于

$$\begin{aligned}W_p&=\frac{\mu}{2}\iint\left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2\right]dx_1dx_2dx_3\\ &=\frac{\mu}{2}\iint\left[\frac{1}{\gamma_t^2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1'}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2\right]\gamma_t dx_1'dx_2dx_3.\end{aligned}\tag{6.2.10}$$

由于静态位错的应力场对于$x_3$轴是对称的，所以

$$\frac{\mu}{2}\iint\left[\frac{\partial u_3}{\partial x_1'}\right]^2dV=\frac{\mu}{2}\int\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2dV=\frac{W_0}{2},\tag{6.2.11}$$

这里$W_0$表示静态位错弹性场的能量，代入(6.2.10)得到

$$W_p=W_0\frac{1-\dfrac{v^2}{2c_t^2}}{\gamma_t}.\tag{6.2.12}$$

而运动位错的动能等于

$$W_k=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)^2dx_1dx_2dx_3=W_0\frac{v^2}{2c_t^2\gamma_t}.\tag{6.2.13}$$

因此，位错的总能量为

$$E=W_p+W_k=\frac{W_0}{\gamma_t}.\tag{6.2.14}$$

这与爱因斯坦的能量关系相似。因为当$v\to c_t$，$\gamma_t\to 0$，可以看出当$v\to c_t$，$E$趋于无穷大。这一结果表明位错运动的极限速度为$c_t$。当$v\ll c_t$，由展开$\gamma_t^{-1}$为$(v/c_t)^2$的幂级数且仅保留展开式的前

两项我们得对全能量$E$的近似表达式

$$E \simeq W_0\left(1+\frac{1}{2}\ \frac{v^2}{c_t^2}\right)=W_0+\frac{1}{2}m_t v^2, \tag{6.2.15}$$

其中最后一个等式右边第二项表示每单位长度位错的动能，系数

$$m_t=W_0/c_t^2 \tag{6.2.16}$$

有时称为每单位长度位错的等效质量。计算表明，位错的等效质量是不大的，例如，在速度不大时，它大约相当于一列原子的质量。这证明了我们在前一节中的断言：位错只有非常小的等效惯量，这一讨论也可类推到有种种载荷作用下的位错的运动。

现在我们考虑在无限各向同性弹性介质中刃型位错的匀速滑移运动。同样选$x_3$轴沿位错线的正向，$x_1$轴沿 Burgers 向量和位错速度向量的共同方向。经过比螺型位错复杂得多的计算之后我们得到非零的应力分量为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11}&=\frac{bx_2c_t^2}{\pi v^2}\left[\frac{\lambda(1-\gamma_l^2)+2\mu}{\gamma_l R_l^2}-\frac{\mu(1+\gamma_t^2)}{\gamma_t R_t^2}\right],\\
\sigma_{12}&=\frac{\mu b c_t^2(x_1-vt)}{2\pi v^2}\left[\frac{(1+\gamma_t)^2}{\gamma_t^3 R_t^2}-\frac{4}{\gamma_l R_l^2}\right],\\
\sigma_{22}&=\frac{bx_2c_t^2}{\pi v^2}\left[\frac{x-\gamma_l^2(\lambda+2\mu)}{\gamma_l R_l^2}+\frac{\mu(1+\gamma_t^2)}{\gamma_t R_t^2}\right],\\
\sigma_{33}&=\nu(\sigma_{12}+\sigma_{22}),
\end{aligned}\right\} \tag{6.2.17}$$

这里

$$\left.\begin{aligned}
R_t^2&=(x_1-vt)^2/\gamma_t^2+x_2^2\\
R_l^2&=(x_1-vt)^2/\gamma_l^2+x_2^2\\
\gamma_t^2&=1-v^2/c_t^2\\
\gamma_l^2&=1-v^2/c_l^2
\end{aligned}\right\} \tag{6 2.18}$$

而$c_t=(\mu/\rho)^{\frac{1}{2}}$和$c_l=[(\lambda+2\mu)/\rho]^{\frac{1}{2}}$分别是弹性横波和弹性纵波的波速。同样可以证明，当$v\to c_t$，每单位长度位错的全能量趋于无限。因此，极限速度也是最小的弹性波速。且对$v\ll c_t$，刃型位

错每单位长度的等效质量由下式给出：

$$m=\frac{W_0}{c_t^2}\left(1+\frac{c_t^4}{c_l^4}\right) \tag{6.2.19}$$

这里$W_0$是储存在单位长度位错的应变能。实验观察证实了弹性波速为位错运动的极限速度的理论预测。同样可讨论位错在各向异性弹性介质中的匀速运动；这时，相应的极限速度也是存在的。

## §6.3 位错的运动和塑性变形

位错的运动不仅会导致弹性变形的变化，而且可以导致晶体的永久变形即塑性变形。图 6-2 显示了当一个刃型位错从左到右地移动时将引起滑移面上方的物体部分移动到右边一个原子间距$b$。因为结果得到的晶格仍是规则的，晶体仍保留在无应力状态，这种变形是塑性变形。因此，从位错的运动可以给出描述宏观塑性变形的一个力学机制。

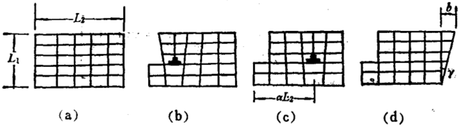



图 6-2

如果图中晶体的长度为$L_2$，高度为$L_1$，那么由弹性力学知切应变

$$\gamma=\frac{b}{L_1}. \tag{6.3.1}$$

如果位错在滑移进行过程中停止在晶体中，停止的地点距离开始滑移点为晶体全长$L_2$的$\alpha$倍（图6-2(c)），那么此时的切应变应为

$$\gamma=\frac{ab}{L_1}. \tag{6.3.2}$$

推而广之，设在单位体积中存在于同一滑移系统的位错线数目为$N$，当这些滑移线扫过的平均面积为$F$，则晶体的宏观应变量应为

$$\gamma=NFb. \tag{6.3.3}$$

上述推理也可以适用于螺型位错的滑移运动。如果设位错线滑移平移距离为$l$，则每条位错线的平均长度为$F/l$。故单位体积中含有单位长度位错的数目即位错的体密度有

$$\rho_V=N\frac{F}{l}, \tag{6.3.4}$$

(6.3.3)可改写成

$$\gamma=\rho_V lb. \tag{6.3.5}$$

(6.3.3)和(6.3.5)式给出了晶体宏观塑性变形和微观位错滑移运动的关系。

更一般地，我们讨论图 6-3 中的位错的运动。切向量为$\mathbf{t}$的位错线$l$经受位移$\delta\mathbf{X}$后到达位置$l'$。取$\xi$轴位于$\mathbf{t}$和$\delta\mathbf{X}$所张成的平面上且垂直于$\mathbf{t}$。$\mathbf{n}$是该平面的法向且与$\xi$、$\mathbf{t}$组成右手螺旋。我

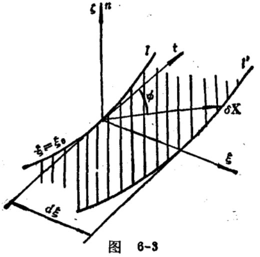



图 6-3

们考虑在静止的位错线 $l$ 上的某一点，由（5.1.2）式我们知道在此点附近有塑性畸变

$$\boldsymbol{\beta}^{P}(\mathbf{x})=-[\mathbf{u}]\otimes\boldsymbol{\delta}(S). \tag{6.3.6}$$

因为由(4.3.22)

$$\boldsymbol{\delta}(S)=\mathbf{n}\times\delta(\zeta), \tag{6.3.7}$$

$$-[\mathbf{u}]=\mathbf{b}H(\xi-\xi_0), \tag{6.3.8}$$

这里

$$H(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x\geqslant 0\end{cases} \tag{6.3.9}$$

取 $\zeta$ 轴沿法向量$\mathbf{n}$，位错线在$\xi$轴上坐标为$\xi_0=\xi_0(l)$．于是

$$\boldsymbol{\beta}^{P}(\mathbf{x})=\mathbf{b}\otimes\mathbf{n}\delta(\zeta)H(\xi-\xi_0), \tag{6.3.10}$$

塑性应变为

$$\mathbf{e}^{P}(x)=\frac{1}{2}(\mathbf{b}\otimes\mathbf{n}+\mathbf{n}\otimes\mathbf{b})\delta(\zeta)H(\xi-\xi_0). \tag{6.3.11}$$

如果位错是不动的，$\mathbf{n}$ 是可以任意选取的。但是如果位错发生位移，则$\mathbf{n}$是唯一确定的。令$\delta\mathbf{X}$为位错的位移并使位错线取 $l'$ 的位置，$\xi$ 轴落在 $\mathbf{t}$ 和 $\delta\mathbf{X}$张成的平面内（如图6-3所示），于是

$$\mathbf{n}=(\delta\mathbf{X}\times\mathbf{t})/|\delta\mathbf{X}|\sin\phi, \tag{6.3.12}$$

其中$\phi$是 $\delta\mathbf{X}$和 $\mathbf{t}$ 的夹角，

$$d\xi_0=|\delta\mathbf{X}|\sin\phi. \tag{6.3.13}$$

由（6.3.11）我们得到塑性应变的改变量是

$$d\mathbf{e}^{P}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}\otimes\mathbf{n}+\mathbf{n}\otimes\mathbf{b})\delta(\zeta)dH(\xi-\xi_0). \tag{6.3.14}$$

由函数$H$的定义式（6.3.9）知$H'(x)=-\delta(x)$，因此

$$dH=\frac{dH}{d\xi_0}d\xi_0=-H'(\xi-\xi_0)d\xi_0=\delta(\xi-\xi_0)d\xi_0. \tag{6.3.15}$$

将（6.3.12）、(6.3.13)和(6.3.15)代入(6.3.14)得到

$$de^P = -\frac{1}{2}[\mathbf{b}\otimes(\delta\mathbf{X}\times\mathbf{t})+(\delta\mathbf{X}\times\mathbf{t})\otimes b]\delta(\xi-\xi_0)\delta(\zeta). \tag{6.3.16}$$

于是我们看到，和弹性变形不一样，塑性变形不能由物体的热力学状态唯一确定；但是，如果位错的运动已知，塑性变形的变化可以由位错参量n和t以及位错的位移$\delta$X所唯一确定。

## §6.4 位错的增殖（位错源）

我们知道，晶体塑性变形的最常见的方式是滑移，而滑移的特点是变形量的分布极不均匀。滑移引起的切应变总是集中在一个个单独的滑移面上，滑移量往往是1000个原子间距上下，而形成可见的滑移带。在上节我们曾经说明，由于一个单独位错的运动扫过了它的整个滑移面就会引起晶体中在滑移面上仅有一个原子间距的相对位移。第二次滑移就需要第二个位错。这样，一条滑移带的生成就需要在单独的一个滑移面上集中成千个位错。这些位错是怎样产生的？这是一个应说明的问题。其次，晶体中位错的密度是可以用X射线衍射以及其它方法加以测量的。实验结果指出，在晶体变形硬化的过程中，位错的密度不是逐步减少而是增加的。如果认为晶体的滑移是单个的位错分别扫过它的滑移面跑出晶体表面而造成的，当最后一个位错被逐出晶体之后，晶体中的原子排列应当是理想状态，因而晶体就能达到理想强度，这个推论和实验事实是显然矛盾的。由此可见，在塑性变形过程中位错应通过某种方式继续不断地被引入晶体，或者是通过某种方式继续不断地产生出来，这就是所谓**位错的增殖**。位错的增殖是位错本身的一种特殊形式的排列和它的运动。借助于这一运动能使晶体中位错的密度不断增加，使得在一个滑移面上能引起宏

观上可见的滑移。有时，这种持续起作用的位错增殖机制又称为**位错源**。历史上提出过种种位错增殖机制，一个比较成功的连续起作用的位错源的最简单的图象是由Frank和Read提出来的。我们将以它为例简单说明一下位错的增殖机制。

考虑固定于$A$、$B$两点间的一段直位错，这可能是位于位错网络中的两个节点间的一段（图6-4(a)），也可能是同一位错的两个转折点间的一段（图6-4(b)）。我们假设存在一均匀的作用力，它仅在$AB$元的滑移面$\pi$上有不为零的分量，而在其它与之相邻接的位错线段的滑移面上的分量均为零。计算表明作用在位错

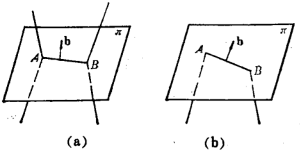



图 6-4

线元$AB$上的力的方向和大小取决于位错的Burgers向量$\mathbf{b}$、位错线元向量的大小、方向以及该点上的应力状态。如果应力状态保持不变，那么作用于单位长度位错线元上的力的大小将保持恒定，而方向将永远和位错线垂直。如果这个作用力超过晶体内的阻碍力，位错线$AB$将开始运动。由于$A$点和$B$点固定，在$AB$开始运动之后，它将弯曲成一个弧形，而且继续向前环绕。如果线张力$T_D$是独立于弧的形状和位错线元的方向的，那么弧的平衡形式为半径是$R$的圆弧，半径$R$由下式给出

$$f=\frac{T_D}{R}+F_{res}. \tag{6.4.1}$$

这里$f$是作用在位错上的力，$F_{res}$是作用在位错上的晶体静阻力，线张力近似为$T_D=\mu b^2$。

很明显，存在某个临界平衡弧半径$R_0$，这里$2R_0$是$A$和$B$的距离。对于满足

$$f<f_0=\frac{T_D}{R_0}+F_{res} \tag{6.4.2}$$

的较小的$f$值，总存在某个半径为$R>R_0$的平衡的位错弧（图6-5中1）。但是，当$f>f_0$，位错弧将不再有平衡位置。这时弧形位错线将继续扩大，靠近固定点$A$、$B$的部分向前运动的角速度应大于中间部分的角速度。因此线段$AB$在运动中形成各以$A$、$B$为中心的一对蜷线。图6-5中2、3、4分别显示了弧形位错线在运动中依次到达的位置。整个运动是在同一个滑移面中进行的。当蜷线的两个分枝分别绕$A$和$B$迴转了270°以后，就有相遇的趋势。注意到如果$AB$原来是纯刃型位错，那么在两枝蜷线相遇时接触的部分恰好是两段符号相反的螺型位错。如果这两段符号相反的螺型位错的动能没有大到能够发生反射的程度，那么它们一经接触就会互相抵消，其结果就造成

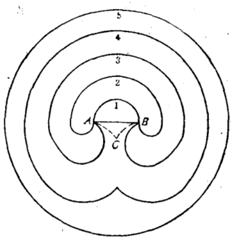


图 6-5

了一个闭合的外环圈，再遗留下一段连结$A$和$B$的线段。在外加切应力的作用下，外部那个闭合位错环会继续向外扩大，而剩下的那一段线段$AGB$显然会在线张力和外加应力（此时它们方向相同）的联合作用下迅速地收缩，回到原来直线$AB$的位置。至此，整个晶体的变形状态除了产生了一个正在扩张中的新的位错环之外，和原始状态完全没有区别。而在外加应力不变的条件下，直线位错线段$AB$又会重复上述运动过程，每一循环过程都会产生一个新的位错环。而每一位错环经过扩张扫过整个滑移面

之后，就会引起一个单位的滑移。显然，如果没有其它干扰，由位错线段 $AB$ 通过这个机制将会不断地产生一连串封闭的位错环，这是一个自行维持的位错增殖过程，叫做**Frank-Read** 源．

令$f=\tau b$，这里$\tau$ 是外切应力，那么维持Frank-Read 源持续运行的所需的临界剪切应力 $\tau_0$可近似地由下式给出

$$\tau_0=\frac{f_0}{b}=\frac{T_D}{bR_0}+\frac{F_{res}}{b}. \tag{6.4.3}$$

更精确的计算表明临界切应力应比上式的结果稍大。如果$\tau>\tau_0$，且$F_{res}=$常数，那么位错源原则上可以产生一连串无穷多个封闭的位错环。然而，阻力$F_{res}$常常伴随着在滑移面上扩张的位错环的半径的增加而增长。例如，如果阻力$F_{res}$的增加正比例于环的半径的增加，那么位错源仅能产生有限数目的位错环。许多作者已仔细地研究了更细致的Frank-Read源的运行情况。

如果位于它的滑移面上的位错仅在一个点上而不是两个点上被固定，它也可以作为一个位错源。例如我们设在位错线 $AB$ 的滑移面上作用有切应力$\tau=$常数。开始时，位错线$AB$是一直线，垂直作用于$AB$ 上的各点的外力是相同的。而 $A$ 点为固定点不能移动，故$AB$上各点的法向线速度应相同，但$AB$在运动中不能维持直线形状，在 $A$ 的附近必须成为曲线。换句话说，要维持 $AB$ 上各点的法向线速度相同而同时$A$为固定点，故$AB$线上除$A$外各点绕$A$转动的角速度应不同，在靠近 $A$ 点处的角速度就要相应地大于远离$A$点处的角速度。因此，运动一开始，位错线$AB$靠近$A$点部分的运动就会超前而远离$A$ 点处的运动就会落后，就这样位错线$AB$从直线 1 逐步发展到曲线5（见图6-6)。同上讨论，当位错线的曲率不为零时，位错线的线张力在这线段上的恢复力就有一定的大小（$\sim T_D/R$)。它的方向指向曲率中心，外加应力作用在$AB$上的力$f$则是朝着向曲率中心相反的方向，其作用是加速或维持位错线向前运动．而线张力引起的力 $T_D/R$ 是朝着曲率中心

的方向，与 $f$ 的方向相反，它倾向于减缓位错线的运动。这样，在线段 $AB$ 作迴转运动的开始阶段，由于靠近 $A$ 的部分运动超前的结果，$A$ 的附近部分的曲率愈来愈大，作用在它上面的线张力也愈来愈大，这个力（加上阻碍力 $F_{res}$）与外加应力产生的 $f$ 相抗衡，使中心部分的角速度不再增加。而位错线上远离固定点 $A$ 的部分开始时它们的曲率随着和固定点的距离的增加而变小，因而 $T_D/R$ 值较小，于是作用在位错线上的净力相应地较大。因此，随着位错线在迴转中愈捲愈紧，中心部分和边远部分的角速度逐渐互相接近，直到最后边远部分和中心部分都以相同的角速度运动。此时，曲线上各点的曲率就不再发生变化。此后，曲线的形状不再改变，整个蜷线象一个整体一样以相同的角速度绕着固定点 $A$ 作稳定的迴转运动。而 $AB$ 每迴转一周，整个晶体在滑移面上面的部分对于下半部分作了一个位移向量为 Burgers 向量 **b** 的滑移。这样就解释了在变形过程中，一方面，位错线的总长度会增长；另一方面，只要外力 $f$ 继续存在，蜷线的不断迴转使滑移面的滑移成为一个能自行维持的过程，从而说明了宏观滑移现象的产生。

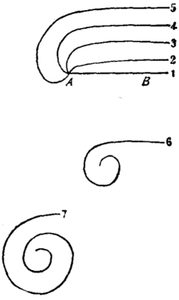


图 6-6

当晶体中刃型位错作攀移运动时，和上面的 Frank-Read 源类似的增殖机制也可起作用，这种类型的位错源通常称Bardeen-Herring源。许多作者还提出过种种不同的位错源，这里就不再介绍了。

# 第七章　非黎曼几何概要

为了用微分几何的观点讨论缺陷问题，现在将各种有关的几何空间概述如下：

## §7.1　仿射空间En

**仿射空间**$E_n$是这样的一个集合，它的元素$X$、$Y$、…称为点，并且存在1-1对应的映射

$$X \in E_n \longleftrightarrow (x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n) \in R^n, \tag{7.1.1}$$

右边可简记为$(x^i) \in R^n$。这样点$X$就可以用$n$个实数来代表。这种从$E_n$到$R^n$的1-1对应关系称为$E_n$中的坐标系。这$n$个有序数就称为点在坐标系$(i)$中的坐标。$E_n$的点的坐标容许下述变换：

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i + a^{i'}, \tag{7.1.2}$$

从而得到另外$n$个数$(x^{i'})$，其中$A_i^{i'}$，$a^{i'}$是常数。这里采用了Einstein求和约定：重复一次且仅一次的上下指标从1到$n$求和。给定这些常数，变换就唯一确定了。这样就引进了新的坐标系$(i')$。$X$点在新的坐标系的坐标为$(x^{i'})$。$A_i^{i'}$满足条件

$$\det A_i^{i'} \neq 0. \tag{7.1.3}$$

在这个条件下映射是1-1对应的

$$X \in E_n \overset{1\text{-}1}{\longleftrightarrow} (x^{i'}) \in R^n. \tag{7.1.4}$$

进一步我们有

$$(x^i) \longleftrightarrow (x^{i'}) \tag{7.1.5}$$

也是1-1对应的。类似地从$(i')$到$(i'')$又有

$$x^{i''}=A^{i''}_{i'}x^{i'}+a^{i''},\tag{7.1.6}$$

$$\det A^{i''}_{i'}\neq 0.\tag{7.1.7}$$

这样，从某一坐标系$(i)$(即$E_n$到$R^n$的一种对应关系)出发可以得到一系列坐标系。$(i)$到$(i')$的变换(7.1.2)称为**仿射变换**。所有这样的仿射变换满足下面的性质：

(1) 如果从$(i)$到$(i')$和从$(i')$到$(i'')$的变换是仿射变换，则存在仿射变换把$(i)$变换到$(i'')$。实际上只要将(7.1.2)代入(7.1.6)即有

$$\begin{aligned}x^{i''}&=A^{i''}_{i'}(A^{i'}_{i}x^{i}+a^{i'})+a^{i''}\\&=(A^{i''}_{i'}A^{i'}_{i})x^{i}+(A^{i''}_{i'}a^{i'}+a^{i''}),\end{aligned}\tag{7.1.8}$$

而且$\det(A^{i''}_{i'}A^{i'}_{i})=(\det A^{i''}_{i'})(\det A^{i'}_{i})\neq 0$，故这个仿射变换是容许的。

(2) 如果从$(i)$到$(i')$的变换是仿射变换，则其逆变换$(i')\to(i)$也是仿射变换。实际上，由于$\det A^{i'}_{i}\neq 0$，存在矩阵$[A^{i'}_{i}]$的逆矩阵$[A^{i}_{i'}]$使得$[A^{i}_{i'}][A^{i'}_{j}]=[\delta^{i}_{j}]$是单位矩阵。这样，只要用这个逆阵乘(7.1.2)得到

$$A^{i}_{i'}x^{i'}=A^{i}_{i'}A^{i'}_{j}x^{j}+A^{i}_{i'}a^{i'}=x^{i}+a^{i},\tag{7.1.9}$$

即

$$x^{i}=A^{i}_{i'}x^{i'}-a^{i},\tag{7.1.10}$$

其中$\det A^{i}_{i'}\neq 0$，$a^{i}=A^{i}_{i'}a^{i'}$。这就是逆变换的表达式，它也是容许的。

(3) 存在恒同变换$(i)\to(i)$

$$x^{i}=\delta^{i}_{j}x^{j}+a^{i},\tag{7.1.11}$$

它也是仿射变换，只要取$a^{i}=0$。

(4) 从(7.1.2)易见从$(i)$经$(i')$到$(i'')$的仿射变换是满足

结合律的。

于是全体仿射变换的集合构成一个群，称为**仿射群**，记作$G_a$。所有这些从一个坐标系，例如$(i)$，出发通过仿射群$G_a$求得的坐标系$(i')$，$(i'')$，…称为$E_n$的许可坐标系，或者称为**仿射参考系**、直线坐标系。用所有许可坐标系装备起来的空间$E_n$叫仿射空间。

变换(7.1.2)的特殊情况是齐次变换，即$a^i=0$。所有齐次变换也构成一个群，它是$G_a$的子群，叫**中心仿射群**。在大多数情况，我们将只讨论齐次仿射变换。

$E_n$中任意两点$X$、$Y$在坐标系$(i)$中有坐标$x^i$、$y^i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$。我们定义向量u是$X$和$Y$两点之差，形式地记为

$$\mathbf{u}=[Y-X]. \tag{7.1.12}$$

$u^i=y^i-x^i$称为向量u在坐标系$(i)$的分量。如果另外有向量$[Z-W]$，它和u的分量相等

$$z^i-w^i=y^i-x^i, \tag{7.1.13}$$

我们说这两个向量相等：$[Z-W]=[Y-X]$，也记为u。因此，向量u实际上是一类等价的两点差。在$E_n$中，向量是自由的，即从$E_n$中任一点$X$均可找到唯一的一点$Y$，使两点差等于给定的向量u：$[Y-X]=\mathbf{u}$。或者说，$X$点加向量u等于$Y$：

$$X+\mathbf{u}=Y. \tag{7.1.14}$$

自由向量的概念蕴含着平行移动的概念，即以$X$为始点的向量u可以平行移动至任意点$W$而得到一个相同的向量$\mathbf{u}=[Z-W]$。这样，在$E_n$中我们通过两点的坐标的差同时也定义了向量的平行移动的概念。

通过分量我们还可以定义向量的数乘和加法。没$\mathbf{u}=[Y-X]$，$u^i=y^i-x^i$，则$\mathbf{v}=a\mathbf{u}$是向量u和实数$a$的数乘，它是具有分量

$$v^i=au^i=a(y^i-x^i) \tag{7.1.15}$$

的一个向量。如果还有另一个向量$\mathbf{t}=[V-W]$，$t^i=v^i-w^i$，则t和

u的和定义为

$$t+u=[V-W]+[Y-X]$$

$$=[Z-Y]+[Y-X]=[Z-X], \qquad (7.1.16)$$

其中$[V-W]=[Z-Y]$，即$v^i-w^i=z^i-y^i$.

由加法的定义知在$E_n$中存在平行四边形法则：

$$[Y-X]=[Z-W]\Rightarrow[W-X]=[Z-Y] \qquad (7.1.17)$$

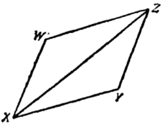



图 7-1

因为

$$y^i-x^i=z^i-w^i\Rightarrow w^i-x^i=z^i-y^i. \qquad (7.1.18)$$

上述作为两点差的向量的概念是在坐标系$(i)$中定义的，现在设还有另外的一个坐标系$(i')$，也按上述的方法定义向量，则$u=[Y-X]$的分量为

$$u^{i'}=y^{i'}-x^{i'}. \qquad (7.1.19)$$

由(7.1.2)我们得到

$$x^{i'}=A_i^{i'}x^i+a^{i'}, \qquad (7.1.20)$$

$$y^{i'}=A_i^{i'}y^i+a^{i'}, \qquad (7.1.21)$$

于是

$$u^{i'}=y^{i'}-x^{i'}=A_i^{i'}(y^i-x^i)=A_i^{i'}u^i. \qquad (7.1.22)$$

这一式子给出了向量的$n$个分量的变换规律．由此可以得到一般向量的定义：在坐标系$(i)$中给定$n$个有序实数$u^1,u^2,\cdots u^n$，如果在任意坐标系$(i')$中总有按下规律

$$u^{i'}=A_i^{i'}u^i \qquad (7.1.23)$$

的 $n$ 个数，则我们说在$E_n$中定义了一个向量 u．这个向量如果在某个坐标系中是某两点的差，则在任何坐标系中，仍然是这两点的差．因此，向量的概念和点的概念一样，并不依赖于坐标系，尽管它是根据坐标来定义的．

$E_n$中坐标为(0，0，…，0)的一点$O$称为在坐标系$(i)$下的坐标原点．而记向量

$$\mathbf{x}=[X-O]. \tag{7.1.24}$$

则 x 称为点$X$的以$O$为原点的向径（位置向量）．在坐标原点给定的情况下，称点$X$或点x这两种讲法是等价的．所有出发于原点的向量构成了 $E_n$ 的向量的全体，易见它们构成向量空间．

现在考虑在$E_n$中的 $n$ 个线性无关的向量$\mathbf{e}_i$．$\mathbf{e}_i$ 除了第 $i$ 个坐标为 1 外其余坐标为零：

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{e}_1\text{的分量为}(1,\ 0,\ \cdots,\ 0),\\ \mathbf{e}_2\text{的分量为}(0,\ 1,\ \cdots,\ 0),\\ \cdots\cdots\\ \mathbf{e}_n\text{的分量为}(0,\ 0,\ \cdots,\ 1).\end{array}\right\} \tag{7.1.25}$$

易证，在$E_n$中任一向量 $\mathbf{u}=(u^1,\ u^2,\ \cdots,\ u^n)$都可以由 $\mathbf{e}_i$ 线性表出．事实上

$$\begin{aligned}(u^1,u^2,\cdots,u^n)=&u^1(1,0,\cdots,0)+u^2(0,1,\cdots,0)\\&+\cdots+u^n(0,0,\cdots,1),\end{aligned} \tag{7.1.26}$$

因而

$$\mathbf{u}=u^1\mathbf{e}_1+u^2\mathbf{e}_2+\cdots+u^n\mathbf{e}_n, \tag{7.1.27}$$

$u^i$就是u在$(i)$的分量．这本身也表明了$E_n$ 中最大的线性无关向量组的个数为$n$．我们称这 $n$ 个向量$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，…，$\mathbf{e}_n$ 为基向量．

在另一个坐标系$(i')$中，我们又有

$$\mathbf{u}=u^{i'}\mathbf{e}_{i'}, \tag{7.1.28}$$

其中$u^{i'}$ 按(7.1.23)变换：

$$u^{i'}=A_i^{i'}u^i, \tag{7.1.29}$$

所以

$$\mathbf{u}=u^i A_i^{i'} \mathbf{e}_{i'}=u^i \mathbf{e}_i, \tag{7.1.30}$$

比较得

$$\mathbf{e}_i = A_i^{i'} \mathbf{e}_{i'}. \tag{7.1.31}$$

由于 $\det A_i^{i'} \neq 0$，用 $[A_i^{i'}]$的逆阵 $[A_{i'}^i]$乘上式得

$$\mathbf{e}_{i'}=A_{i'}^i \mathbf{e}_i, \tag{7.1.32}$$

它给出基向量的变换规律，其中 $[A_i^{i'}]$ 与$[A_{i'}^i]$是互逆的变换系数。可以看到基向量所用的变换系数恰与 $\mathbf{u}$ 的分量$u^i$ 的变换系数互逆。如果把基向量的变换叫做**协变变换**，则称向量 $\mathbf{u}$ 的分量 $u^i$ 的变换(7.1.23)是**逆变变换**。我们分别用上下指标，一方面是为了采用求和约定，另一方面也是为了区别这两种不同的变换法则。

## §7.2 张量代数

为了定义张量，先引进比张量更广泛一点的叫做几何对象的量。应用几何空间的理论研究几何或物理问题在于运用代数和分析的工具讨论定义在有关空间上的几何对象。

如果有序数集 $\phi_A(A=1, 2, \cdots, N)$和 $E_n$ 中的仿射参考系$(i)$存在对应关系，使得

（1） 每一参考系$(i)$有且仅有一个集$\phi_A$与之对应；

（2） 对应于$(i')$的集$\phi_{A'}$ 可用$\phi_A$、$A_i^{i'}$、$A_{i'}^i$和$a_i^i$表出；

我们就称$\phi_A$是在$E_n$中关于坐标系$(i)$的**几何对象**的分量。

例如，从(7.1.2)可知点的坐标是几何对象的分量。如果在条件(2)中，$\phi_{A'}$的表达式关于$\phi_A$ 是线性齐次的，而关于$A_i^{i'}$和 $A_{i'}^i$是代数齐次的，则称 $\phi_A$ 为**几何量**在 $E_n$ 中关于$(i)$的分量。从(7.1.23)知 $u^i$ 是称为向量的几何量的分量。

为统一起见，向量 u 又称一阶逆变张量。标量在任何参考系里的值是不变的，与变换系数无关，因而也是几何量的分量（只有一个分量），称为零阶张量。利用协变变换法则(7.1.32)我们可以定义一阶协变张量 $v_i$：

$$v_{i'}=A^i_{i'}v_i. \qquad (7.2.1)$$

另一种重要的几何量叫**仿射量**，它是由向量到向量的线性变换：

$$\mathbf{T}\mathbf{u}=\mathbf{w}. \qquad (7.2.2)$$

T 作用在基向量 $\mathbf{e}_i$ 上得到一个向量，可用 $\mathbf{e}_i$ 的线性组合表示，记为

$$\mathbf{T}\mathbf{e}_i=T^j{}_i\mathbf{e}_j. \qquad (7.2.3)$$

如果我们将u、w在(i)中的表示

$$\mathbf{u}=u^i\mathbf{e}_i, \qquad (7.2.4)$$

$$\mathbf{w}=w^i\mathbf{e}_i \qquad (7.2.5)$$

代入(7.2.2)式并利用(7.2.3)式得到

$$w^j\mathbf{e}_j=\mathbf{T}(u^i\mathbf{e}_i)=u^i(\mathbf{T}\mathbf{e}_i)=u^iT^j{}_i\mathbf{e}_j, \qquad (7.2.6)$$

由$\mathbf{e}_j$的线性无关性得到

$$w^j=u^iT^j{}_i, \qquad (7.2.7)$$

其中 $T^j{}_i$ 称为仿射量T在(i) 的分量。我们进一步考察它的变化规律。为此，在(i)里记

$$\mathbf{T}\mathbf{e}_{i'}=T^{j'}{}_{i'}\mathbf{e}_{j'}, \qquad (7.2.8)$$

并将(7.1.32)式代入得到

$$\mathbf{T}(A^i_{i'}\mathbf{e}_i)=T^{j'}{}_{i'}A^j_{j'}\mathbf{e}_j \qquad (7.2.9)$$

即

$$A^i_{i'}T^j{}_i\mathbf{e}_j=T^{j'}{}_{i'}A^j_{j'}\mathbf{e}_j, \qquad (7.2.10)$$

比较两边，由$\mathbf{e}_j$ 的线性无关性得

$$A^i_{i'}T^j{}_i=A^j_{k'}T^{k'}{}_{i'}, \qquad (7.2.11)$$

再用逆阵 $[A^{j'}_j]$乘两边得到

$$T^{j'}{}_{i'}=A^i_{i'}A^{j'}_j T^j{}_i.\tag{7.2.12}$$

T的分量的这个变换法则表明仿射量T是一个几何量，确切地说是(1，1)阶张量。如果用$(p, q)$表示$p$阶逆变、$q$阶协变，则一般的$(p, q)$阶张量是$n^{p+q}$个用$p$个上标、$q$个下标编号的有序数组$\phi^{j_1j_2\cdots j_p}{}_{i_1i_2\cdots i_q}$，它们从$(i)$到$(i')$按下面的法则变换：

$$\phi^{j'_1\cdots j'_p}{}_{i'_1\cdots i'_q}=A^{j'_1}_{j_1}\cdots A^{j'_p}_{j_p}A^{i_1}_{i'_1}\cdots A^{i_q}_{i'_q}\phi^{j_1\cdots j_p}{}_{i_1\cdots i_q}.\tag{7.2.13}$$

张量间可进行各种代数运算，其结果仍是张量。现将主要的列举如下：（为简单起见，仅以低阶的张量为例）

（1）数乘：$a\phi^j{}_i=\zeta^j{}_i$ (7.2.14)

是和张量$\phi^j{}_i$同型的张量，因为在新坐标下

$$\zeta^{j'}{}_{i'}=a\phi^{j'}{}_{i'}=aA^{j'}_jA^i_{i'}\phi^j{}_i$$

$$=A^{j'}_jA^i_{i'}(a\phi^j{}_i)=A^{j'}_jA^i_{i'}\zeta^j{}_i,\tag{7.2.15}$$

确实是按张量的变换法则进行变换的。

（2）加法：只有同型的张量才能相加，其和仍是同型的张量

$$\zeta^{ij}=\xi^{ij}+\eta^{ij}.\tag{7.2.16}$$

易证有

$$\zeta^{i'j'}=A^{i'}_iA^{j'}_j\zeta^{ij}.\tag{7.2.17}$$

（3）乘法：例如在每一坐标系由(2，0)阶张量的$n^2$个分量$\xi^{ij}$和(0，1)阶张量的$n$个分量$\eta_k$构造$n^3$个数，记为$\zeta^{ij}{}_k=\xi^{ij}\eta_k$，可以证明这样的$\zeta^{ij}{}_k$确实满足张量的变换规律，因为在$(i')$系中

$$\zeta^{i'j'}{}_{k'}=\xi^{i'j'}\eta_{k'}=A^{i'}_iA^{j'}_j\xi^{ij}A^k_{k'}\eta_k$$

$$=A^{i'}_iA^{j'}_jA^k_{k'}(\xi^{ij}\eta_k)=A^{i'}_iA^{j'}_jA^k_{k'}\zeta^{ij}{}_k,\tag{7.2.18}$$

所以，乘积仍为张量，其阶是乘子张量的阶之和。例如，上例中$\zeta^{ij}{}_k$是(2，1)阶张量。注意张量的乘法与次序有关。

（4）缩并：例如我们有(3，2)阶张量$\phi^{ijk}{}_{rs}$(在每个坐标系

中有$n^5$个数），现在，令其中某个上标与下标相等，例如$j=s$，这就意味着求和而得到$n^3$个数（丢掉了$j$与$s$不同的分量）：

$$\zeta^{ik}{}_r=\phi^{isk}{}_{rs}=\phi^{i1k}{}_{r1}+\phi^{i2k}{}_{r2}+\phi^{i3k}{}_{r3}+\cdots+\phi^{ink}{}_{rn},\tag{7.2.19}$$

在上式最后一项中$n$不求和。在$(i')$中我们有

$$\begin{aligned}\zeta^{i'k'}{}_{r'}&=\phi^{i's'k'}{}_{r's'}=A^{i'}_{i}A^{s'}_{s}A^{k'}_{k}A^{r}_{r'}A^{t}_{s'}\phi^{isk}{}_{rt}\\&=(A^{s'}_{s}A^{t}_{s'})A^{i'}_{i}A^{k'}_{k}A^{r}_{r'}\phi^{isk}{}_{rt}\\&=\delta^{t}_{s}A^{i'}_{i}A^{k'}_{k}A^{r}_{r'}\phi^{isk}{}_{rt}\\&=A^{i'}_{i}A^{k'}_{k}A^{r}_{r'}\phi^{isk}{}_{rs}\\&=A^{i'}_{i}A^{k'}_{k}A^{r}_{r'}\zeta^{ik}{}_{r},\end{aligned}\tag{7.2.20}$$

故得到的是一个新的(2,1)阶张量。

（5）指标置换：若对张量同类（同是上标或下标）的任意个指标变换次序，结果是同型的新张量。例如$\phi^{ijk}$变换后两个指标的次序之后得到

$$\zeta^{ijk}=\phi^{ikj},\tag{7.2.21}$$

在$(i')$中我们有

$$\zeta^{i'j'k'}=\phi^{i'k'j'}=A^{i'}_{i}A^{k'}_{k}A^{j'}_{j}\phi^{ikj}=A^{i'}_{i}A^{j'}_{j}A^{k'}_{k}\zeta^{ijk},\tag{7.2.22}$$

它仍是(3,0)阶张量。可见指标的次序是重要的。

（6）对称化和反对称化

如果一个张量的某一组同型指标的任意两个经置换后所得的张量与原张量相同，则称这个张量关于这组指标是对称的；如果所得的张量和原张量相差一个符号，则称这个张量关于这组指标是反对称的。

如果把张量的同类$N$个指标进行$N!$次不同的置换，并且取所得到的$N!$个新张量的算术平均值，这种运算叫做张量的**对称化**。新张量关于参与置换的$N$个指标为对称，将参与置换的指标

放在圆括弧中表示之，例如

$$B_{(ij)}=\frac{1}{2}(B_{ij}+B_{ji}), \tag{7.2.23}$$

$$C_{(ijk)}=\frac{1}{3!}(C_{ijk}+C_{jki}+C_{kij}+C_{ikj}+C_{kji}+C_{jik}). \tag{7.2.24}$$

如果指标经奇数次置换的新张量取反符号后再取平均值，这样的运算叫**反称化**，所得的新张量是关于参与置换的$N$个指标为反对称的，将这些指标放在方括弧中表示之，例如

$$B_{[ij]}=\frac{1}{2}(B_{ij}-B_{ji}), \tag{7.2.25}$$

$$C_{[ijk]}=\frac{1}{3!}(C_{ijk}+C_{jki}+C_{kij}-C_{ikj}-C_{kji}-C_{jik}), \tag{7.2.26}$$

也可以只对某些（不是全体）指标进行对称化或反称化，不涉及进去的指标用两竖线隔开，例如

$$C_{[i|j|k]}=\frac{1}{2}(C_{ijk}-C_{kji}). \tag{7.2.27}$$

（7）商法则：以简单情况为例，如果在每个坐标系$(i)$都给定$n$个数$u(1)$，$u(2)$，…，$u(n)$，使得对任意$(1, 1)$阶张量$T^i{}_j$都有

$$v^i=T^i{}_j u(j) \tag{7.2.28}$$

仍是$(1, 0)$阶张量，则$u(j)$也是$(1, 0)$阶张量。因为在$(i')$中

$$T^{i'}{}_{j'}u(j')=A^{i'}_i A^j_{j'}T^i{}_j u(j')=v^{i'}=A^{i'}_i v^i=A^{i'}_i T^i{}_j u(j), \tag{7.2.29}$$

于是

$$A^{i'}_i A^k_{j'}[u(j')-A^{j'}_j u(j)]T^i{}_k=0. \tag{7.2.30}$$

由于$T^i{}_k$是与$u(j)$无关的任意张量，故必有

$$u(j')-A_j^{j'}u(j)=0,\qquad(7.2.31)$$

即
$$u(j')=A_j^{j'}u(j),\qquad(7.2.32)$$

这说明$u(j)$是(1，0)阶张量。该法则经常被应用于直接肯定某些量的张量性。

## §7.3 多重向量和容积

**多重向量**或称**$p$-向量**（Polivector）是值得专门提一提的张量。它是$p$阶反对称逆变张量$V^{i_1\cdots i_p}$。由于它关于所有指标反称，故$n^p$个分量中只有$\binom{n}{p}$个是独立的，且

$$V^{i_1\cdots i_p}=V^{[i_1\cdots i_p]}.\qquad(7.3.1)$$

如果$p$-向量可由$p$个按一定次序排列的向量按下列方式表出

$$V^{i_1i_2\cdots i_p}=p!\underset{1}{V}^{[i_1}\underset{2}{V}^{i_2}\cdots\underset{p}{V}^{i_p]}=\begin{vmatrix}\underset{1}{V}^{i_1} & \underset{1}{V}^{i_2} & \cdots & \underset{1}{V}^{i_p}\\ \underset{2}{V}^{i_1} & \underset{2}{V}^{i_2} & \cdots & \underset{2}{V}^{i_p}\\ & \cdots\cdots & & \\ \underset{p}{V}^{i_1} & \underset{p}{V}^{i_2} & \cdots & \underset{p}{V}^{i_p}\end{vmatrix},\qquad(7.3.2)$$

则它称为**简单$p$-向量**，记为$[\underset{1}{\mathbf{v}},\ \underset{2}{\mathbf{v}},\ \cdots\underset{p}{\mathbf{v}}]$或$\underset{1}{\mathbf{v}}\wedge\underset{2}{\mathbf{v}}\wedge\cdots\wedge\underset{p}{\mathbf{v}}$。后一形式也称**外积**或**向量积**。其中各个向量的次序是重要的，任何两个向量互换位置，简单$p$-向量改变符号：

$$[\underset{1}{\mathbf{v}},\cdots,\underset{j}{\mathbf{v}},\cdots,\underset{i}{\mathbf{v}},\cdots,\underset{p}{\mathbf{v}}]=-[\underset{1}{\mathbf{v}},\cdots,\underset{i}{\mathbf{v}},\cdots,\underset{j}{\mathbf{v}},\cdots,\underset{p}{\mathbf{v}}].\qquad(7.3.3)$$

当$p=1$，1-向量$v^i$就是一阶逆变张量，也可以认为就是向量$\mathbf{v}$。当$p=2$，简单2-向量$[\underset{1}{\mathbf{v}},\ \underset{2}{\mathbf{v}}]$又称**双向量**。对它可以作如下的几何解释：设$\underset{1}{\mathbf{v}}$和$\underset{2}{\mathbf{v}}$是$E_n$中一个2维超平面上的两个非共线向量，又设在该超平面上还有另外两个非共线向量$\underset{1}{\mathbf{w}}$和$\underset{2}{\mathbf{w}}$，它们可以由$\underset{1}{\mathbf{v}}$和$\underset{2}{\mathbf{v}}$

线性表出：

$$\underset{1}{\mathbf{w}}=B_1^1\underset{1}{\mathbf{v}}+B_1^2\underset{2}{\mathbf{v}},\tag{7.3.4}$$

$$\underset{2}{\mathbf{w}}=B_2^1\underset{1}{\mathbf{v}}+B_2^2\underset{2}{\mathbf{v}},\tag{7.3.5}$$

则

$$\begin{aligned}[\underset{1}{\mathbf{w}},\ \underset{2}{\mathbf{w}}]&=[B_1^1\underset{1}{\mathbf{v}}+B_1^2\underset{2}{\mathbf{v}},\ B_2^1\underset{1}{\mathbf{v}}+B_2^2\underset{2}{\mathbf{v}}]\\&=B_1^1B_2^2[\underset{1}{\mathbf{v}},\ \underset{2}{\mathbf{v}}]+B_1^2B_2^1[\underset{2}{\mathbf{v}},\ \underset{1}{\mathbf{v}}]\\&=\begin{vmatrix}B_1^1 & B_1^2\\ B_2^1 & B_2^2\end{vmatrix}[\underset{1}{\mathbf{v}},\ \underset{2}{\mathbf{v}}].\end{aligned}\tag{7.3.6}$$

可见二维超平面上任意两个非共线向量的外积之间只差一常数因子。因此，二维超平面可用简单双向量来定向。平行的二维超平面具有相同的定向双向量（准确到一个常数因子）。同样，在 $E_n$ 中的$m$维超平面($m<n$)都可用一个简单的$m$-向量来定向。

一般地 $p$-向量有$\binom{n}{p}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$个独立分量。当 $p=n$，$n$-向量只有 $\binom{n}{n}=1$ 个独立分量，例如$V^{12\cdots n}$，其余分量或是$\pm V^{12\cdots n}$，或者等于零。但是它是 $n$ 阶张量，它表示一个有向体积，方向与$\underset{1}{\mathbf{v}}$，$\underset{2}{\mathbf{v}}$，…，$\underset{n}{\mathbf{v}}$ 的排列次序有关。根据性质(7.3.3)，当$p>n$，所有 $p$-向量均等于零。

## §7.4 张量场

在连续介质力学或其它物理问题中常出现场的问题。所谓张量场就是在 $E_n$ 的某个区域$D$ 上每一点$X$ 都定义了一个同类型的张量。以(1，1)阶张量为例，如果对每个$X\in D$，有

$$T^i{}_j=T^i{}_j(X),\tag{7.4.1}$$

我们说在$D$上定义了一个张量场，即原来自由的张量与点联系起

来，随点变化。当取定一个坐标系$(i)$时，(7.4.1)可写成函数形式

$$T^i{}_j = T^i{}_j(x^1, x^2, \cdots, x^n) = T^i{}_j(x^k). \tag{7.4.2}$$

如果在同一区域$D$同时定义了$n$个张量场，则张量代数可无条件地应用于张量场，只要对每个场的张量在同一点进行运算。

一般而言，几何对象随点而变化（而物理对象还可能依赖于时间）。为了描述这种场的变化率，我们必须从张量代数进入张量分析。对于仿射空间，张量分析类似于多元函数的微积分，是比较简单的。我们简述如下：设在场的定义域$D$由以参数形式给定一条曲线

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \quad 或 \quad x^i = x^i(t), \tag{7.4.3}$$

则场(7.4.1)在这曲线上就成为参量$t$的复合函数。这些函数在曲线(7.4.3)的无穷小位移下的微分

$$dT^i{}_j = \frac{\partial T^i{}_j}{\partial x^k} dx^k \tag{7.4.4}$$

称为$T^i{}_j$的**绝对微分**。它是和$T^i{}_j$同类型的张量，因为考虑到在仿射空间里$A^{i'}_i$等等是不随点而变化的常数，由(7.2.12)我们有

$$dT^{i'}{}_{j'} = A^{i'}_i A^j_{j'} dT^i{}_j. \tag{7.4.5}$$

引入符号

$$T^i{}_{j;k} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial T^i{}_j}{\partial x^k}, \tag{7.4.6}$$

并将(7.4.4)写成

$$dT^i{}_j = T^i{}_{j;k} dx^k, \tag{7.4.7}$$

注意到$dx^k$是与$T^i{}_{j;k}$无关的任意一阶逆变张量，由商法则可知$T^i{}_{j;k}$是(1，2)阶张量，称为$T^i{}_j$的**绝对微商（协变导数）**，它是一个比$T^i{}_j$升高一阶的新的张量场。

## §7.5 曲线坐标和协变导数

到目前为止，在 $E_n$ 中我们只讨论了直线坐标系。在那里坐标的变换公式是

$$x^{i'}=A_i^{i'}x^i+a^{i'},\tag{7.5.1}$$

而基向量按

$$e_{i'}=A_{i'}^i e_i\tag{7.5.2}$$

变换。其中 $A_i^{i'}$ 、$A_{i'}^i$ 和 $a^{i'}$ 都是常数。不存在障碍，实际也需要将(7.5.1) 推广至一般的函数变换：

$$x^{i'}=x^{i'}(x^i).\tag{7.5.3}$$

但是，这种推广是在一定的限制之下的。设(7.5.3) 是在$E_n$的单连通区域$D\in E_n$内仿射坐标 $x^i$ 的$N$阶连续可微单值可逆函数，即在整个$x^i$的变化范围内存在反函数

$$x^i=x^i(x^{i'}).\tag{7.5.4}$$

并且(7.5.4)也是 $N$ 阶连续可微单值的。因此，在整个区域内

$$\det\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\neq 0,\ \det\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\neq 0.\tag{7.5.5}$$

若(7.5.4)不退化为(7.5.1)，则$x^{i'}$称为点$X$的**曲线坐标**，$(i')$称为**曲线坐标系**。仍然满足上述要求，从一个曲线坐标系$(i')$ 又可以转至另一个曲线坐标系$(i'')$ 以及 $(i''')$等等……。利用(7.5.4)式，点$X$的向径（关于原点$O$）是 $x^{i'}$的连续可微函数：

$$\mathbf{x}=x^i(x^{i'})\mathbf{e}_i.\tag{7.5.6}$$

它的 $n$ 个偏导数是切于坐标线的切向量，也是 $x^{i'}$ 的函数，记为

$$\mathbf{x}_{,i'}\equiv\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\mathbf{e}_i.\tag{7.5.7}$$

它们是线性无关的，即由

$$a^{i'}\mathbf{x}_{,i'}=0\tag{7.5.8}$$

必得到 $\alpha^{i'}=0$，$1\leqslant i'\leqslant n$。因为由(7.5.7)，上式变成

$$\alpha^{i'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\mathbf{e}_i=0, \tag{7.5.9}$$

由于$\mathbf{e}_i$是基向量，它们是彼此线性无关的，由上式必得到

$$\alpha^{i'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}=0, \quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{7.5.10}$$

这是关于$\alpha^{i'}$的齐次线性方程组，由于(7.5.5)，方程组(7.5.10)的系数行列式不为零，故该方程组仅有零解，即$\alpha^{i'}=0$。这就证明了我们的结论。

在$E_n$的仿射坐标系$(i)$里，任何向量$\mathbf{u}$不管作用在那里均可分解为$\mathbf{u}=u^i\mathbf{e}_i$，这里$\mathbf{e}_i$是常向量，对这种分解，可以作两种解释：

（1） 在$E_n$的原点有一组基，记为$(O,\{\mathbf{e}_i\})$，每个向量(张量）先平行移动到$O$点，然后在这组基上分解；

（2） 在$E_n$的每一点$X$都有一组基，记为$(X,\{\mathbf{e}_i\})$，称为**局部基**，每个向量（张量）就地在局部基上分解。

在曲线坐标系$(i')$里，分解该如何进行呢？假如按第一种解释，也在原点$O$取一组与(7.5.4)无关的常向量$\{\mathbf{e}_i\}$构成统一的基$(O,\{\mathbf{e}_i\})$，每个向量（张量）也先平行移动到$O$点然后分解，这实际上等于引进了一个以$(O,\{\mathbf{e}_i\})$为基的仿射系，从而使得曲线坐标系的引入成为无的放矢。因此，剩下的就是第二种选择。现在的问题是在每一点$X$如何选取局部基？这里是有任意性的，前面讲到(7.5.7)式表示的与$(i')$相联系的在点$X$的$n$个切向量$\mathbf{x}_{,i'}$既然是线性无关的，那当然可以作为一种与$(i')$相联系的基。但是，这$n$个切向量是随点而变的，仅是局部基，记为

$$(X,\{\mathbf{e}_{i'}\}), \tag{7.5.11}$$

其中$\mathbf{e}_{i'}\equiv\mathbf{x}_{,i'}$。这种由坐标系自然派生的基称为**自然局部基**。当由一个曲线坐标系$(i')$转至另一个曲线坐标系$(i'')$时，局部基的

变换法则是

$$\mathbf{e}_{i''}=\mathbf{x}_{,i''}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}}\mathbf{x}_{,i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}}\mathbf{e}_{i'}. \tag{7.5.12}$$

因此，在$E_n$的某具体点$X$，互成逆阵的$[\partial x^i/\partial x^{i'}]$和$[\partial x^{i'}/\partial x^i]$的元素就起着变换系数的作用．仿照仿射坐标系的记法，也记为

$$A_i^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i},\quad A_{i'}^i=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \tag{7.5.13}$$

就有相同的公式

$$\mathbf{e}_{i'}=A_{i'}^i\mathbf{e}_i. \tag{7.5.14}$$

和仿射坐标系中的公式(7.1.32)不同的有两点：一方面这里 $A_i^{i'}$、$A_{i'}^i$是点的函数；另一方面，这里的$\mathbf{e}_i$、$\mathbf{e}_{i'}$也与点有关了．今后，$(i)$一般就理解为曲线坐标系，包含仿射坐标系作为特殊情况看待，并且都采用局部自然基．从

$$d\mathbf{x}=\mathbf{x}_{,i}\,dx^i=dx^i\mathbf{e}_i \tag{7.5.15}$$

可知，$X$点的位置向量$\mathbf{x}$的微分（即从点$X$到无限邻近点的向量，略去高阶无穷小）在局部基$(X,\{\mathbf{e}_i\})$具有逆变分量$dx^i$．在无穷小邻域里，局部基$(X,\{\mathbf{e}_i\})$也是仿射量，因此称为局部仿射基．在局部基上，全部张量代数适用于作用在同一点的各张量．

若在空间某区域的每一点都定义有同类型的张量，则有所谓张量场．一般说来，张量场中被考察的张量随位置（和时间）而变化．对固定时刻，研究张量场因位置而变化的情况使我们从张量代数的领域进入到张量分析的领域上来．但是，在张量分析中出现了一个新问题，因为求导数涉及比较作用于相邻两点，例如$X$和$X+dX$处的张量．直接比较作用在不同点的两个张量的分量是没有意义的，因为两个点的局部基一般是不同的．从最简单的向量$\mathbf{u}(X)$入手，它在$(X,\mathbf{e}_i)$的分量为$u^i(X)$．问题归结为在$(X+dX,\{\mathbf{e}_i\})$中$u^i(X+dX)$应有什么值才代表平行移动到$X+$

$dX$的原来向量 $\mathbf{u}(X)$。设过点$X$和点 $X+dX$ 定义有一条光滑曲线，其参数方程为

$$x^i=x^i(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1,\quad 1\leqslant i\leqslant n, \tag{7.5.16}$$

其中各函数有连续导数。设在这曲线上每一点定义有相同的常向量$\mathbf{u}$，则在局部基上

$$\mathbf{u}=u^i(t)\mathbf{e}_i(x^j) \tag{7.5.17}$$

两边求微分得

$$0=du^i\mathbf{e}_i+u^id\mathbf{e}_i=du^i\mathbf{e}_i+u^i\partial_j\mathbf{e}_idx^j, \tag{7.5.18}$$

令

$$\partial_j\mathbf{e}_i=\mathbf{x}_{,ij}=\Gamma^k_{ij}\mathbf{e}_k, \tag{7.5.19}$$

我们得到

$$0=(du^k+\Gamma^k_{ij}u^idx^j)\mathbf{e}_k, \tag{7.5.20}$$

于是

$$du^k=-\Gamma^k_{ij}u^idx^j. \tag{7.5.21}$$

就是说，如果同一向量 $\mathbf{u}$ 在$X$点的分量为$u^i$，则平行移动至无限邻近的点$X+dX$，$\mathbf{u}$ 的分量略去高阶小量后应为

$$u^i(X)+du^i=u^i(X)-\Gamma^i_{jk}u^j(X)dx^k, \tag{7.5.22}$$

这里所出现的三指标的系数$\Gamma^i_{jk}$也是点的函数，在上式中在点 $X$ 取值。它起着联系向量 $\mathbf{u}$ 在点$X$和无限邻近的点 $X+dX$ 的分量的作用。换言之，它体现了在$E_n$的曲线坐标系中平行移动是什么意思。$\Gamma^i_{jk}$叫做**连络对象**，是一个很重要的量，为了今后应用我们有必要对它仔细研究一下。首先，由于

$$\mathbf{x}_{,ij}=\mathbf{x}_{,ji}, \tag{7.5.23}$$

按定义

$$\Gamma^k_{ji}\mathbf{e}_k=\partial_i\mathbf{e}_j=\mathbf{x}_{,ji}=\mathbf{x}_{,ij}=\partial_j\mathbf{e}_i=\Gamma^k_{ij}\mathbf{e}_k \tag{7.5.24}$$

可知连络对象关于下标对称

$$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}. \tag{7.5.25}$$

在新的曲线坐标系$(i')$中

$$\partial_{j'}\mathbf{e}_{i'}=\mathbf{x}_{,i'j'}=\Gamma^{k'}_{i'j'}\mathbf{e}_{k'}\text{。}\tag{7.5.26}$$

利用

$$\mathbf{e}_{i'}=A^{i}_{i'}\mathbf{e}_{i},\tag{7.5.27}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{k'}_{i'j'}\mathbf{e}_{k'}&=\partial_{j'}\mathbf{e}_{i'}=\partial_{j'}(A^{i}_{i'}\mathbf{e}_{i})\\&=A^{j}_{j'}\partial_{j}(A^{i}_{i'}\mathbf{e}_{i})\\&=A^{j}_{j'}A^{i}_{i'}\partial_{j}\mathbf{e}_{i}+A^{j}_{j'}\mathbf{e}_{i}\partial_{j}A^{i}_{i'}\\&=A^{j}_{j'}A^{i}_{i'}\Gamma^{k}_{ij}\mathbf{e}_{k}+A^{j}_{j'}\partial_{j}A^{i}_{i'}A^{k'}_{i}\mathbf{e}_{k'}\\&=A^{j}_{j'}A^{i}_{i'}A^{k'}_{k}\Gamma^{k}_{ij}\mathbf{e}_{k'}+A^{j}_{j'}A^{k'}_{k}\partial_{j}A^{k}_{i'}\mathbf{e}_{k'}\end{aligned}\tag{7.5.28}$$

得

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}=A^{j}_{j'}A^{i}_{i'}A^{k'}_{k}\Gamma^{k}_{ij}+A^{j}_{j'}A^{k'}_{k}\partial_{j}A^{k}_{i'},\tag{7.5.29}$$

考虑到

$$0=\partial_{j}(A^{k'}_{k}A^{k}_{i'})=A^{k'}_{k}\partial_{j}A^{k}_{i'}+A^{k}_{i'}\partial_{j}A^{k'}_{k},\tag{7.5.30}$$

$$A^{k'}_{k}\partial_{j}A^{k}_{i'}=-A^{k}_{i'}\partial_{j}A^{k'}_{k},\tag{7.5.31}$$

(7.5.29)又可写成

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}=A^{j}_{j'}A^{i}_{i'}A^{k'}_{k}\Gamma^{k}_{ij}-A^{j}_{j'}A^{i}_{i'}\partial_{j}A^{k'}_{i}.\tag{7.5.32}$$

可以证明，从$(i')$到$(i'')$，$\Gamma^{k''}_{i''j''}$也按(7.5.29)或(7.5.32)变换。(7.5.29)或(7.5.32)式的第二项使之不成为张量变换公式，因此，这样在每个坐标系中都可算出来的$n^3$个数$\Gamma^{k}_{ij}$不是张量，称为仿射空间$E_n$的连络对象。在仿射坐标系里，因为$\mathbf{e}_i$=常量，从定义$\partial_j\mathbf{e}_i=\Gamma^{k}_{ij}\mathbf{e}_k$可以看出$\Gamma^{k}_{ij}=0$。但是，在曲线坐标系里一般地$\Gamma^{k}_{ij}\neq0$，这种现象是不足为奇的，因为它不是张量。如果是

张量，则因为张量的变换规则是关于该几何量的分量是齐次的，只要在一个坐标系里为零，则在一切坐标系里均为零。

现在，有了曲线坐标系所确定的连络对象，我们就可以回过头来对张量进行微分运算了。设有向量场 $\mathbf{u}(X)$ 随点而变化，求 $\mathbf{u}(X)$ 从点 $X$ 至无限邻近的点 $X+dX$ 的增量的分量叫做绝对微分，记为$Du^i$。注意到$\mathbf{u}$在$X+dX$之值 $\mathbf{u}(X+dX)$ 的分量为 $u^i(X+dX)$。如果保持$\mathbf{u}(X)$在$X$点的值不变，但平行移动至 $X+dX$ 点，它的分量为 $u^i+du^i=u^i-\Gamma^i_{jk}u^jdx^k$，所以

$$Du^i=u^i(X+dX)-[u^i(X)-\Gamma^i_{jk}u^kdx^j]$$

$$=[u^i_{,j}+\Gamma^i_{jk}u^k]dx^j$$

$$\equiv u^i{}_{;j}dx^j, \tag{7.5.33}$$

它代表了增量 $\Delta\mathbf{u}=\mathbf{u}(X+dX)-\mathbf{u}(X)$ 的线性主要部分在 $(X, \{\mathbf{e}_i\})$的分量，其中

$$u^i{}_{;j}\equiv u^i_{,j}+\Gamma^i_{jk}u^k \tag{7.5.34}$$

叫协变微商。容易证明：从$(i)$到新系$(i')$我们有

$$Du^{i'}=A^{i'}_i Du^i, \tag{7.5.35}$$

$$u^{i'}{}_{;j'}=A^{i'}_i A^j_{j'} u^i{}_{;j}, \tag{7.5.36}$$

即它们都是按张量的变换规律变化的。为了求一阶协变张量$v_i$的绝对微分和协变导数，仍和 $u^i$ 一样，我们先要求出它的平移规律。设定义在$X$点的一阶协变张量$v_i$平移到点$X+dX$的分量为$v_i+dv_i$，为了计算$v_i+dv_i$我们用一个任意一阶逆变张量 $u^i$ 通过和 $v_i$ 乘积和缩并得到一个零阶张量，即标量 $u^iv_i$。标量只有一个分量——一个数，而且平移后其值不变，即

$$u^iv_i=(u^i+du^i)(v_i+dv_i). \tag{7.5.37}$$

略去高阶小量，并将(7.5.21)代入我们有

$$u^idv_i=-du^kv_k=\Gamma^k_{ij}u^idx^jv_k. \tag{7.5.38}$$

由$u^i$ 的任意性，于是

$$dv_i = \Gamma^k_{ij} v_k dx^j, \tag{7.5.39}$$

就是说，$v_i$从点$X$平行移动至点$X+dX$的分量为

$$v_i(X) + dv_i = v_i(X) + \Gamma^k_{ij} v_k(X) dx^j. \tag{7.5.40}$$

于是，绝对微分为

$$\begin{aligned} Dv_i &= v_i(X+dX) - [v_i(X) + \Gamma^k_{ij} v_k(X) dx^j] \\ &= (v_{i,j} - \Gamma^k_{ij} v_k) dx^j \\ &\equiv v_{i;j} dx^j, \end{aligned} \tag{7.5.41}$$

其中协变微商

$$v_{i;j} = v_{i,j} - \Gamma^k_{ij} v_k. \tag{7.5.42}$$

同样可证

$$Dv_{i'} = A^i_{i'} Dv_i, \tag{7.5.43}$$

$$v_{i';j'} = A^i_{i'} A^j_{j'} v_{i;j}. \tag{7.5.44}$$

利用结果(7.5.21)并构造标量$T^i{}_j v_i u^j$又可求得(1,1)阶张量$T^i{}_j$从点$X$平移到点$X+dX$的分量

$$T^i{}_j(X) + [-\Gamma^i_{lk} T^k{}_j(X) + \Gamma^k_{lj} T^i{}_k(X)] dx^l. \tag{7.5.45}$$

于是得

$$T^i{}_{j;k} = T^i{}_{j,k} + \Gamma^i_{kl} T^l{}_j - \Gamma^l_{kj} T^i{}_l. \tag{7.5.46}$$

总之，用构造标量的途径可得任意张量的平移法则，并一般地得到张量场，例如$\phi^{ij}{}_{kl}(X)$的绝对微分和协变导数

$$D\phi^{ij}{}_{kl} = \phi^{ij}{}_{kl;m} dx^m, \tag{7.5.47}$$

$$\begin{aligned} \phi^{ij}{}_{kl;m} = \phi^{ij}{}_{kl,m} &+ \Gamma^i_{mp} \phi^{pj}{}_{kl} \\ &+ \Gamma^j_{mp} \phi^{ip}{}_{kl} - \Gamma^p_{mk} \phi^{ij}{}_{pl} - \Gamma^p_{ml} \phi^{ij}{}_{kp}, \end{aligned} \tag{7.5.48}$$

仔细观察可以看出式中连络对象出现的次数和该张量的上下标次数相同，符号则与上下标有关。容易证明，在新的曲线坐标系($i'$)里$\phi^{i'j'}{}_{k'l';m'}$仍服从张量分量的变换规律

$$\phi^{i'j'}{}_{k'l';m'}=A^{i'}_{i}A^{j'}_{j}A^{k}_{k'}A^{l}_{l'}A^{m}_{m'}\phi^{ij}{}_{kl;m}. \tag{7.5.49}$$

就是说，$(p,q)$阶张量的协变导数是$(p,q+1)$阶张量，而绝对微分$D\phi^{ij}{}_{kl}$则是和原张量$\phi^{ij}{}_{kl}$同型的张量。当$(i)$是仿射坐标系即各点的局部仿射基相同时，由(7.5.19)，各$\Gamma^{k}_{ij}=0$，从(7.5.48)可以看出，此时协变导数退化为偏导数，而绝对微分退化为一般微分。

应该注意，绝对微分和协变导数的计算，亦即张量分析并未涉及空间有无度量的问题。

## §7.6 非完整系

给定曲线坐标系$(i)$就可以按定义找到相对应的局部基向量$\mathbf{e}_i=\mathbf{x}_{,i}$，这种和一个曲线坐标系相对应的基称为**完整标架**（或**完整系**）。各基向量就是坐标曲线的切向量。但是经常因某种特殊情况需要引入不直接由坐标系派生的标架，这时就产生相反的问题：如果在空间$E_n$的某区域的每一点都给出$n$个线性无关的向量（用大写指标表示）

$$\mathbf{e}_I(x^j)=A^{i}_{I}(x^j)\mathbf{e}_i, \tag{7.6.1}$$

其中$\mathbf{e}_i$是原来某个坐标系$(i)$的基向量。不失一般性可设$(i)$为仿射系，于是

$$\det A^{i}_{I}\neq 0 \tag{7.6.2}$$

存在$A^{I}_{i}(x^j)$使得

$$A^{I}_{i}A^{i}_{J}=\delta^{I}_{J},\qquad A^{I}_{i}A^{j}_{I}=\delta^{j}_{i}. \tag{7.6.3}$$

若设函数$A^{i}_{I}(x^j)\in C^1$（有一阶连续导数），则这些向量(7.6.1)是由某个曲线坐标系$\{X^I\}$派生的基向量$\mathbf{e}_I=\partial\mathbf{x}/\partial X^I$的充分必要条件是$A^{I}_{i}(x^j)$可积，即

$$\partial_{[i} A^I_{j]} = 0, \tag{7.6.4}$$

这时就有

$$A^I_i(x^j) = \frac{\partial X^I}{\partial x^i}. \tag{7.6.5}$$

如果 (7.6.4) 不满足，就不存在相对应的曲线坐标系，$\{e_I\}$就称为非完整系。

对于非完整系，局限于一个点，一切张量代数运算照旧能够进行。但是，在进行张量分析运算时就又进一步产生问题了。前面求协变导数时要求计算偏导数，现在既然不存在坐标系 $\{X^I\}$，当然无从谈起对 $X^I$ 求偏导数。为了克服这个困难，我们可以对非完整系引进 Pfaff 导数：

$$\partial_I [\text{或}(\ \ )_{,I}] \stackrel{\text{df}}{=} A^i_I \partial_i. \tag{7.6.6}$$

考虑到

$$0 = \partial_i (A^j_I A^I_k) = \partial_i A^j_I A^I_k + A^j_I \partial_i A^I_k, \tag{7.6.7}$$

$$\partial_i A^j_I = A^k_I A^j_k \partial_i A^j_J = - A^k_I A^j_L \partial_i A^L_k, \tag{7.6.8}$$

从

$$\begin{aligned}\partial_I \partial_J &= A^i_I \partial_i (A^j_J \partial_j) = A^i_I A^j_J \partial_i \partial_j + A^i_I \partial_i A^j_J \partial_j \\ &= A^i_I A^j_J \partial_i \partial_j - A^i_I A^j_J \partial_i A^L_j \partial_L,\end{aligned} \tag{7.6.9}$$

$$\partial_J \partial_I = A^i_I A^j_J \partial_j \partial_i - A^i_J A^j_I \partial_i A^L_j \partial_L, \tag{7.6.10}$$

我们有

$$\begin{aligned}\partial_J \partial_I - \partial_I \partial_J &= (\partial_i A^L_j - \partial_j A^L_i) A^i_I A^j_J \partial_L \\ &= 2 A^i_I A^j_J \partial_{[i} A^L_{j]} \partial_L.\end{aligned} \tag{7.6.11}$$

由于非完整系不满足(7.6.4)式，Pfaff 导数的次序已不可交换：

$$\partial_I \partial_J \neq \partial_J \partial_I, \tag{7.6.12}$$

其中这$n^3$ 个数

$$\Omega_{IJ}{}^L \stackrel{\text{df}}{=} A^i_I A^j_J \partial_{[i} A^L_{j]} \tag{7.6.13}$$

是表征非完整系特征的，称为**非完整对象**。它可用来判断一个系是否完整系。它是关于下标为反对称的，因为

$$\begin{aligned}\Omega_{IJ}{}^{K} &= -A^i_I A^j_J \partial_{[j} A^K_{i]} \\ &= -A^i_J A^j_I \partial_{[i} A^K_{j]} = -\Omega_{JI}{}^{K}. \end{aligned} \tag{7.6.14}$$

非完整对象不是一个张量，它的变换规则是

$$\begin{aligned}\Omega_{I'J'}{}^{K'} &= A^i_{I'} A^j_{J'} \partial_{[i} A^{K'}_{j]} \\ &= A^i_{I'} A^j_{J'} A^{K'}_K \partial_{[i} A^K_{j]} + A^i_{I'} A^j_{J'} A^K_{[j} \partial_{i]} A^{K'}_K \\ &= A^I_{I'} A^J_{J'} A^{K'}_K A^i_I A^j_J \partial_{[i} A^K_{j]} - A^i_{I'} A^j_{J'} A^K_{[i} \partial_{j]} A^{K'}_K \\ &= A^I_{I'} A^J_{J'} A^{K'}_K \Omega_{IJ}{}^{K} - A^K_{[I'} \partial_{J']} A^{K'}_K. \end{aligned} \tag{7.6.15}$$

在完整系里我们已定义了连络对象，它在坐标变换时按(7.5.32)变换。现在按此规律可以引进非完整系的连络对象

$$\Gamma^K_{IJ} = A^i_I A^j_J A^K_k \Gamma^k_{ij} - A^i_I A^j_J \partial_i A^K_j. \tag{7.6.16}$$

在完整系中 $\Gamma^k_{[ij]}=0$。然而对非完整系，由于条件(7.6.4)不满足，

$$\begin{aligned}\Gamma^K_{[IJ]} &= -A^i_{[I} A^j_{J]} A^K_k \Gamma^k_{ij} - A^i_{[I} A^j_{J]} \partial_i A^K_j \\ &= -A^i_I A^j_J A^K_k \Gamma^k_{[ij]} - A^i_I A^j_J \partial_{[i} A^K_{j]} \\ &= -A^i_I A^j_J \partial_{[i} A^K_{j]} \\ &= -\Omega_{IJ}{}^{K} \\ &\neq 0, \end{aligned} \tag{7.6.17}$$

故 $\Gamma^K_{IJ}$ 在非完整系中已不再关于下指标对称了。对非完整系，我们也可形式地引进绝对微分和协变导数。因为任意张量场，例如 $T^i{}_j(X)$ 的绝对微分 $DT^i{}_j$ 和协变导数 $T^i{}_{j;k}$ 也是张量场，从完整系($i$)到非完整系($I$)它们的分量按张量分量的变换规律变化，有

$$DT^I{}_J = A^I_i A^j_J DT^i{}_j, \tag{7.6.18}$$

$$T^I{}_{J;K}=A^I_i A^j_J A^k_K T^i{}_{j;k}. \tag{7.6.19}$$

经过计算可知在$(I)$系里仍有

$$DT^I{}_J=T^I{}_{J;K}dX^K, \tag{7.6.20}$$

$$T^I{}_{J;K}=T^I{}_{J,K}-\Gamma^L_{KM}T^M{}_J+\Gamma^M_{KJ}T^I{}_M, \tag{7.6.21}$$

其中$dX^I=A^I_i dx^i$，而$T^I{}_{J,K}$应理解为Pfaff导数。对于更一般的张量也可得到类似的公式。

## §7.7 欧氏空间 Rn

至今一切讨论是在仿射空间$E_n$内进行的。我们建立了点的集合与实数组集的对应关系，由此得到向量的定义，引进了体现$E_n$的平行性的连络对象$\Gamma^i_{jk}$等等，从而可以进行求导等运算。这种平行性并不是额外引进的，它仅是由于$E_n$的点与实数系对应的结果。

现在我们在$E_n$中引进一个新的运算，叫做两个向量的标量积。它的引进将使空间的性质变得大为丰富。

任意两个向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的标量积$\mathbf{uv}$是具有下列性质的 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的非退化标量值函数

(1)对称性：$\mathbf{uv}=\mathbf{vu}$, (7.7.1)

(2)线性性：$\mathbf{u}(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{uv}+\mathbf{uw}$. (7.7.2)

由性质(1)和(2)又可得到

$$(\mathbf{v}+\mathbf{w})\mathbf{u}=\mathbf{vu}+\mathbf{wu}, \tag{7.7.3}$$

故它是所谓双线性的。

(3)正定性：$\mathbf{u}^2=\mathbf{uu}>0$, $\forall\mathbf{u}\neq0$. (7.7.4)

非退化意味着对于任意的$\mathbf{u}\neq0$，恒可找到一个$\mathbf{v}$使得$\mathbf{uv}\neq0$。

由这样定义的标量积装备起来的仿射空间$E_n$称为欧氏空间$R_n$。

向量 $\mathbf{u}$ 的标量平方和长度分别定义为

$$\mathbf{u}^2=\mathbf{u}\mathbf{u}, \tag{7.7.5}$$

和

$$|\mathbf{u}|=\sqrt{\mathbf{u}^2}. \tag{7.7.6}$$

两个向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 称为正交的，如果满足

$$\mathbf{u}\mathbf{v}=0. \tag{7.7.7}$$

向量$\mathbf{u}=[Y-X]$的长度称为点$X$和$Y$间的距离，记为

$$XY=\sqrt{(Y-X)^2}. \tag{7.7.8}$$

各个基向量$\mathbf{e}_i$之间的标量积记为

$$g_{ij}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i=g_{ji}. \tag{7.7.9}$$

显然，$g_{ij}$是对称的。在坐标变换$(i)\rightarrow(i')$时

$$g_{i'j'}=\mathbf{e}_{i'}\mathbf{e}_{j'}=A^i_{i'}A^j_{j'}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=A^i_{i'}A^j_{j'}g_{ij}, \tag{7.7.10}$$

故$g_{ij}$是二阶协变张量，称为协变度量张量。我们看到，$g_{ij}$是由基向量的标量积定义推出来的。反过来，有了$g_{ij}$就可求得任何两个向量的标量积

$$\mathbf{u}\mathbf{v}=(u^i\mathbf{e}_i)(v^j\mathbf{e}_j)=u^iv^j\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=u^iv^jg_{ij}. \tag{7.7.11}$$

因此，为了使$E_n$变为$R_n$，定义标量积和定义度量张量是等价的，即它们间是可以互推的。

我们还可进一步求得任何向量 $\mathbf{u}$ 的长度：

$$|\mathbf{u}|=\sqrt{g_{ij}u^iu^j}, \tag{7.7.12}$$

这正是度量（即长度之意）张量一词的来源。标量积的正定性等价于度量的正定性，即

$$\det g_{ij}>0, \tag{7.7.13}$$

因为对任意$\mathbf{u}\neq0$，

$$u^iu^jg_{ij}=(u^i\mathbf{e}_i)(u^j\mathbf{e}_j)=\mathbf{u}\mathbf{u}>0 \tag{7.7.14}$$

是正定二次型。(7.7.13)保证了$[g_{ij}]$的逆阵$[g^{ij}]$的存在，即满足

$$g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k. \tag{7.7.15}$$

将由(7.7.15)在$(i)$求得之$g^{ij}$变换至$(i')$得：

$$g^{i'j'}=A_i^{i'}A_j^{j'}g^{ij}. \tag{7.7.16}$$

可以证明它与$g_{i'j'}$也是互逆的，即

$$\begin{aligned}g^{i'j'}g_{j'k'}&=(A_i^{i'}A_j^{j'}g^{ij})(A_{j'}^{m}A_{k'}^{k}g_{mk})\\&=A_i^{i'}A_{k'}^{k}\delta_j^m g^{ij}g_{mk}\\&=A_i^{i'}A_{k'}^{k}g^{ij}g_{jk}\\&=A_i^{i'}A_{k'}^{k}\delta_k^i\\&=A_k^{i'}A_{k'}^{k}=\delta_{k'}^{i'},\end{aligned} \tag{7.7.17}$$

因此，$[g_{ij}]$和$[g^{ij}]$的互逆具有不变性．$g^{ij}$称为$R_n$的逆变度量张量．度量张量$g_{ij}$的引进使$E_n$的张量运算大为改观．要看到这一点，我们先从基$\mathbf{e}_i$构造新的一组基

$$\mathbf{e}^i=g^{ij}\mathbf{e}_j, \tag{7.7.18}$$

它也是线性无关的，因为由

$$a_i\mathbf{e}^i=a_ig^{ij}\mathbf{e}_j=0 \tag{7.7.19}$$

和$\det g^{ij}\neq 0$恒得出$a_i=0$，$1\leqslant i\leqslant n$．易证

$$\mathbf{e}^{i'}=A_i^{i'}\mathbf{e}^i \tag{7.7.20}$$

和

$$\mathbf{e}_i=g_{ij}\mathbf{e}^j. \tag{7.7.21}$$

于是$\{\mathbf{e}^i\}$也可看作$R_n$的一组基．由(7.7.20)可知$\{\mathbf{e}^i\}$是按逆变规律变化的．为了和$\mathbf{e}_i$区别，将$(X,\{\mathbf{e}_i\})$称为协变基，而$(X,\{\mathbf{e}^i\})$称为逆变基．任何向量$\mathbf{u}$也可以在$\{\mathbf{e}^i\}$上分解：

$$\mathbf{u}=u_j\mathbf{e}^j. \tag{7.7.22}$$

一阶协变张量$u_i$是$\mathbf{u}$在基$\{\mathbf{e}^i\}$的分量．利用(7.7.18)和(7.7.21)，从(7.1.27)和(7.7.22)可得

$$u_i=g_{ij}u^j \tag{7.7.23}$$

和

$$u^i=g^{ij}u_j. \tag{7.7.24}$$

这样，原来在 $E_n$ 中互不相关的逆变张量和协变张量现在通过度量张量 $g^{ij}$，$g_{ij}$（在 $R_n$ 内）联系起来了，它们均代表同一个几何量——向量，分别称为向量 **u** 的逆变分量和协变分量。正因为这个原因，采用了相同的芯字母 **u**。这里度量张量起着升降指标的作用。对于高阶张量，情况完全一样。例如仿射量 **T** 就有四种不同的分量表示：$T^{ij}$、$T_{ij}$、$T^i{}_j$ 和 $T_i{}^j$，它们只是同一个张量的不同表示而已。

因此，在 $R_n$ 中以 $g_{ij}$ 沟通起来的协变分量和逆变分量之间已无区别，这样就可以采用不同分量形式，卸下指标的累赘而直接对几何量本身进行运算的绝对符号法。它有简洁明瞭和几何概念突出的特点。感兴趣的读者可参阅文献[3]。

下面再讨论一下在欧氏空间 $R_n$ 内进行的张量分析。在 $E_n$ 中连络对象 $\Gamma^k_{ij}$ 是由

$$\partial_i \mathbf{e}_j = \Gamma^k_{ij} \mathbf{e}_k \tag{7.7.25}$$

引进的。现在在欧氏空间 $R_n$ 里，用 $\mathbf{e}^l$ 点乘上式两边

$$\Gamma^k_{ij} \mathbf{e}_k \mathbf{e}^l = (\partial_i \mathbf{e}_j) \mathbf{e}^l \tag{7.7.26}$$

从而得到

$$\Gamma^k_{ij} = (\partial_i \mathbf{e}_j) \mathbf{e}^k. \tag{7.7.27}$$

但是如果用 $\mathbf{e}_l$ 点乘(7.7.25)两边，我们又得到

$$(\partial_i \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_k = \Gamma^l_{ij} g_{lk} \equiv \Gamma_{ijk} = [ij,k], \tag{7.7.28}$$

另一方面，将 $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = g_{ij}$ 对 $x^k$ 微商得到

$$\partial_k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \partial_k \mathbf{e}_j = g_{ij,k} \tag{7.7.29}$$

即

$$\Gamma_{kij} + \Gamma_{kji} = g_{ij,k}, \tag{7.7.30}$$

经指标轮换后得到

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj} = g_{jk,i}, \tag{7.7.31}$$

$$\Gamma_{jki} + \Gamma_{jik} = g_{ki,j}, \tag{7.7.32}$$

后两式相加并减去(7.7.30)式得

$$\Gamma_{ijk}=\frac{1}{2}(g_{jk,i}+g_{ki,j}-g_{ij,k}), \tag{7.7.33}$$

并且有

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{kl}(g_{jl,i}+g_{li,j}-g_{ij,l}). \tag{7.7.34}$$

可见，在$R_n$中连络对象$\Gamma^k_{ij}$直接由度量张量来表达。直接由度量张量导出的连络对象经常用符号

$$[ij,k]=\Gamma_{ijk}, \tag{7.7.35}$$

$$\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}=\Gamma^k_{ij} \tag{7.7.36}$$

表示，并且称为**第一类和第二类 Christoffel 符号**。于是，在欧氏空间$R_n$中，第一类和第二类 Christoffel 符号完全由度量张量决定了，由此可进行求张量的绝对微分、协变导数等运算。

## §7.8 流　形

上面提及在仿射空间$E_n$中的连通区域内可引入各种曲线坐标系，这些坐标系间可以互相1-1对应地进行变换：

$$x^{i'}=x^{i'}(x^i) \text{ 和相反地} x^i=x^i(x^{i'}), \tag{7.8.1}$$

其中变换函数具有$N$阶连续导数，简称$N$阶变换，记为

$$(x^i)\overset{C^N}{\longleftrightarrow}(x^{i'}). \tag{7.8.2}$$

空间的仿射性在于在(7.8.1)中存在一族特殊的相互可以用线性变换联系的坐标系

$$(i)\overset{l}{\longleftrightarrow}(i'), \tag{7.8.3}$$

这里"$l$"表示变换函数是线性的。如果放弃这种特殊的坐标系的存在性的假设，这个区域就不再是$E_n$的一部分，而只是一个失去仿射性质的点的集合，记为$\mathfrak{M}$。如果在$X\in\mathfrak{M}$，$(x^i)\in\Omega$和$(x^{i'})\in\Omega'$之间存在映射

$$X \longleftrightarrow (x^i) \in \Omega, \tag{7.8.4}$$

$$X \longleftrightarrow (x^{i'}) \in \Omega', \tag{7.8.5}$$

这里$\Omega$和$\Omega'$是 $R^n$的连通区域，并且$\{x^i\}$和$\{x^{i'}\}$间存在$N$阶变换(7.8.1)，则称$\mathfrak{M}$为**简单流形**。$\{x^i\}$或简记为$(i)$就称为该简单流形$\mathfrak{M}$的坐标系。$N$阶简单流形$\mathfrak{M}$可以映射到$-\infty<x^i<+\infty$，它们是没有边的，$\mathfrak{M}$体现了$\{x^i\}$的变化区域的在$N$阶变换(7.8.1)下的不变性质。当$N$越大，容许的变换就越小，流形上的性质就越丰富。当$N=0$，我们有连续变换，所得的流形$\mathfrak{M}$叫**拓扑流形**。在今后的讨论中$N$至少等于2。如果这个失去仿射性质（即不存在仿射坐标系$(i)\overset{l}{\longleftrightarrow}(i')$）的点集不能引入统一的坐标系（例如整个球面或环面），但可以把它看作是若干个简单流形的缝合，我们就有一般流形$\mathfrak{M}_n$。流形微分几何讨论局部性质。流形的每个局部又可看作简单流形，在那些若干个简单流形互相重叠的部分，我们假定每部分的有关坐标系也通过$N$阶变换(7.8.1)联系。

在流形中，由于失去仿射性，已不能像仿射空间$E_n$那样作为两点差来定义可以自由平移的向量了。但是，在$\mathfrak{M}_n$的每一点$X$，仍然可以像$E_n$那样定义各种张量，进行张量的代数运算，因为它们只是一定数目的与每个$(i)$相联系并且通过$A_i^{i'}=\partial x^{i'}/\partial x^i$、$A_{i'}^i$进行变换的有序数组而已。由于(7.8.1)是$N$阶变换，这些系数$A_i^{i'}$，$A_{i'}^i$是存在的，例如，$T^i{}_j(X)$按规律

$$T^{i'}{}_{j'}(X)=A_i^{i'}(X)A_{j'}^j(X)T^i{}_j(X) \tag{7.8.6}$$

变换到$(i')$，形式上这一切好像和$E_n$的曲线坐标系一样。但实际上，这两者已有本质差别。因为在流形$\mathfrak{M}_n$上已不存在向量，因而不存在甚至是局部的仿射坐标基$\{\mathbf{e}_i\}$，那当然就谈不上某向量$\mathbf{u}$以及它的作为在$\mathbf{e}_i$上分解的分量$u^i$了。因此，变换公式(7.8.6)

对流形来说只是形式上的。出现在流形上不同点的张量相互间没有联系，不能进行平移比较，更谈不上进行运算。即使在某坐标系$(i)$里，两点$X_1$和$X_2$处的张量值满足

$$T^i{}_j(X_1)=T^i{}_j(X_2), \tag{7.8.7}$$

在另一坐标系$(i')$中这一等式一般就不成立了。为了越过这一障碍，我们设另有一仿射空间$A_n$（原点为$O$），约定$X\in\mathfrak{M}_n$与$O\in A_n$相对应。我们要求在点$X$上的一阶逆变张量$u^i$、$v^i$、…等和$A_n$中的向量$\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$、…间建立一个保持线性关系的1-1对应：

$$u^i\leftrightarrow\mathbf{u},\ w^i\leftrightarrow\mathbf{w}\Leftrightarrow\alpha u^i+\beta w^i\leftrightarrow\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{w},$$
$$\forall\alpha,\ \beta\in R. \tag{7.8.8}$$

这种对应可以如下实现：在坐标系$(i)$下，在$\mathfrak{M}_n$的$X$点上取$n$个线性无关的一阶逆变张量，例如第$j$个张量的第$i$个分量记为$\underset{j}{e}{}^i$：

$$\underset{j}{e}{}^i=\delta^i_j\quad(j=1,2,\cdots n,\ \det\underset{j}{e}{}^i\neq0) \tag{7.8.9}$$

作为基，又取$A_n$的任一组基$\{\mathbf{e}_j\}$按次序与之对应。下面看到这种对应唯一确定了在$X$的几何量$u^i\in\mathfrak{M}_n$与$A_n$中的向量$\mathbf{u}$的对应关系。因为任何$u^i$可表为

$$u^i=\delta^i_ju^j=u^j\underset{j}{e}{}^i, \tag{7.8.10}$$

则根据(7.8.8)，在$A_n$中有唯一的向量

$$\mathbf{u}=u^j\mathbf{e}_j \tag{7.8.11}$$

与之对应。这样$A_n$的全部向量就和$X$点上全体一阶逆变张量建立起一个保持线性运算关系的1-1对应。形象地说，这个$A_n$就好像是挂在$X\in\mathfrak{M}_n$上的，称为$\mathfrak{M}_n$在$X$点上的**仿射切空间**。

考虑在$\mathfrak{M}_n$上过$X$点的曲线$x^i=x^i(t)$。在坐标变换(7.8.1)中，沿曲线的无穷小移动

$$dx^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\ dx^i=A^{i'}_i\ dx^i \tag{7.8.12}$$

是一阶逆变张量，在$A_n$对应有无穷小量

$$d\mathbf{x}=dx^i\mathbf{e}_i. \tag{7.8.13}$$

于是，在$X$的所有$dx^i$，略去高阶小量后，为$X$上仿射切空间的无穷小向量所对应。可以说，$A_n$不仅在$X$点切于$\mathfrak{M}_n$，而且还在无穷小范围内精确到高阶小量和$\mathfrak{M}_n$贴在一起，捏合在一起。如果把$X$作为$A_n$的原点$O$（今后总是这样做的），形势就好像某曲面的切面切于某一点一样，这样就可把流形上的运算转移到切平面上去。如果约定地也称$\mathfrak{M}_n$的一阶逆变张量为向量的分量，则$\underset{j}{e}^i$就是第$j$条坐标曲线的切向量的第$i$个分量。因为过$X$点的第$j$条坐标曲线为

$$x^i=t\delta^i_j \quad (t=x^j), \tag{7.8.14}$$

则

$$\frac{dx^i}{dt}=\delta^i_j=\underset{j}{e}^i. \tag{7.8.15}$$

坐标系$(i')$里的基——切向量$\underset{j'}{e}^{i'}=\delta^{i'}_{j'}$在$(i)$系的基上的分量为

$$\begin{aligned}\underset{j'}{e}^i&=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\underset{j'}{e}^{i'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\delta^{i'}_{j'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\\&=\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\delta^i_j=\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\underset{j}{e}^i,\end{aligned} \tag{7.8.16}$$

这正是仿射坐标系基向量的协变规律。

根据(7.8.8)，上式又给出在$A_n$对应于$\underset{j'}{e}^i$的向量

$$\underset{j'}{\mathbf{e}}=\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\mathbf{e}_j. \tag{7.8.17}$$

由于$\det \partial x^i/\partial x^{i'}\neq 0$，$\{\mathbf{e}_{j'}\}$是线性无关的，它是与$\mathfrak{M}_n$在$X$点在系$(i')$的基$\{\underset{j'}{e}^{i'}\}$相对应的$A_n$的基。

设(7.8.8)式的向量$\mathbf{u}$在$\{e^i_{i'}\}$上可表为

$$\mathbf{u}=\bar{u}^{i'}\mathbf{e}_{i'}. \tag{7.8.18}$$

将(7.8.17)代入(7.8.11)并与上式比较得

$$\bar{u}^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}u^{i}=u^{i'}, \qquad (7.8.19)$$

这里$u^{i'}$是一阶逆变张量$u^i$从系$(i)$变换至$(i')$的分量。可见在$\mathfrak{M}_n$上由变换法则得到的$u^{i'}$与在$A_n$相对应的向量$\mathbf{u}$在基$\{\mathbf{e}_{i'}\}$的分量是相同的。因此，想求得$u^{i'}$有两条途径：或者直接在$\mathfrak{M}_n$上用$(i)\to(i')$的变换；或者将$\mathbf{u}$在基$\{\mathbf{e}_{i'}\}$上直接分解。

关于微分流形的严格定义，我们在第九章里还要进一步讨论。

在$\mathfrak{M}_n$中也有非完整系的问题：在$\mathfrak{M}_n$给出坐标系$(i)$，则可确定点$X$上的基$\{\underset{j}{e}^i\}$，从而确定点$X$的切空间$A_n$的基向量$\{\mathbf{e}_i\}$。如果反过来，任给定$\{\mathbf{e}_{i'}\}$，即给定$A^i_{i'}$ ($\det A^i_{i'}\neq 0$，从而$A^{i'}_i$也给定)，

$$\mathbf{e}_{i'}=A^i_{i'}\,\mathbf{e}_i, \qquad (7.8.20)$$

就可求出$\mathfrak{M}_n$在点$X$的一组基

$$\underset{i'}{e}^j=A^i_{i'}\,\underset{i}{e}^j. \qquad (7.8.21)$$

如果

$$\partial_{[i}A^{j'}_{j]}=0, \qquad (7.8.22)$$

则可通过积分$x^{i'}=\int A^{i'}_i dx^i$求得坐标系$(i')$。这个坐标系的坐标曲线的切向量在$(i)$系具有和(7.8.21)相同的分量，因为：

$$A^j_{j'}\frac{dx^{j'}}{dt}=A^j_{j'}\,\underset{i'}{e}^{j'}=A^j_{j'}\,\delta^{j'}_{i'}=A^j_{i'}$$

$$=A^i_{i'}\,\delta^j_i=A^i_{i'}\,\underset{i}{e}^j,\ (t=x^{i'}). \qquad (7.8.23)$$

若(7.8.22)不满足，(7.8.21)就是$\mathfrak{M}_n$的非完整系。在今后的讨论中，如不特别声明，我们一般都假设$(I)$为非完整系，而$(i)$为完整系。

## §7.9 仿射连络空间Ln

在 $E_n$ 中由于允许仿射坐标系，从而得到自由向量和平行移动性，即平行性质已由空间的性质所完全确定。引进曲线坐标系后，由

$$\partial_i \mathbf{e}_j = \mathbf{x}_{,ij} = \Gamma^k_{ij} \mathbf{e}_k \tag{7.9.1}$$

给出的连络对象$\Gamma^k_{ij}$就集中地反映了$E_n$的平行移动性质。在一般的非完整系$(I)$里，连络对象按下列规律变换：

$$\Gamma^{K'}_{I'J'} = A^I_{I'} A^J_{J'} A^{K'}_K \Gamma^K_{IJ} + A^{K'}_K \partial_{I'} A^K_{J'}$$

$$= A^I_{I'} A^J_{J'} A^{K'}_K \Gamma^K_{IJ} - A^I_{I'} A^J_{J'} \partial_I A^{K'}_J, \tag{7.9.2}$$

对完整系，$\Gamma^i_{[jk]}=0$。但对非完整系，$\Gamma^I_{[JK]}\neq 0$，它是非对称的，这种非对称性来源于坐标系的非完整性而不是空间的性质。

现在在 $\mathfrak{M}_n$ 中不允许仿射坐标系，因而没有由空间性质所规定的平行移动法则，没有向量，也就无从用(7.9.1)通过基向量定义连络对象了。这似乎是无路可走了。但是正是这一点就给我们带来了自由度。我们可以在$\mathfrak{M}_n$的系$(I)$中直接引入按规律(7.9.2)变换的仿射连络场$\Gamma^K_{IJ}(X)$：选择的办法自然是无穷无尽的，只要选定一种，就相当于赋予流形$\mathfrak{M}_n$以平行移动性质。

例如，有了$\Gamma^I_{JK}$，我们就可以伴随地规定在$X$点的$u^I(X)$对应于点$X+dX$处的$u^I-\Gamma^I_{JK}u^K dX^J$，认为这两分量是相等的。这种规定就是人为地在$\mathfrak{M}_n$中加了平行性的限制。用仿射连络$\Gamma^I_{JK}$装备的流形$\mathfrak{M}_n$称为**仿射连络空间**，记为$L_n$。

容易证明变换(7.9.2)构成一个群。在$E_n$的$(i)$系里$\Gamma^i_{jk}$是对称的，但在非完整系$(I)$里，$\Gamma^K_{IJ}$失去对称性。因此，我们没有理由在$\mathfrak{M}_n$对引进的$\Gamma^K_{IJ}$的对称性作任何先验的规定。类似于$E_n$，我们可以用(7.6.13)式定义$L_n$的非完整对象：

$$\Omega_{IJ}{}^{K} \stackrel{\text{df}}{=} A_{I}^{i} A_{J}^{j} \partial_{[i} A_{j]}^{K} = -A_{k}^{K} \partial_{[I} A_{J]}^{k}, \tag{7.9.3}$$

它不是一个张量，其变换法则见(7.6.15)。

在$E_n$中恒有

$$\Omega_{IJ}{}^{K} + \Gamma_{[IJ]}^{K} = 0, \tag{7.9.4}$$

这是由于在(7.6.16)式中完整系的连络对象$\Gamma_{ij}^{k}$具有对称性。若$\Omega_{IJ}{}^{K} \neq 0$，则$\Gamma_{[IJ]}^{K} \neq 0$。这仅仅来源于非完整系。所以由$\Omega_{IJ}{}^{K}=0$可推出$\Gamma_{[IJ]}^{K}=0$即$\Gamma_{IJ}^{K}$关于下标对称。

在$L_n$中，由于事先不要求引进的$\Gamma_{IJ}^{K}$具有对称性，$\Omega_{IJ}{}^{K} + \Gamma_{[IJ]}^{K}$不再恒为零。由$\Omega_{IJ}{}^{K}=0$并不能推出$\Gamma_{[IJ]}^{K}=0$。$\Gamma_{IJ}^{K}$的非对称性有两个来源：一方面来自坐标系的非完整性，另一方面也可以来自空间性质本身。

引入关于下标为反对称的

$$S_{IJ}{}^{K} \stackrel{\text{df}}{=} \Gamma_{[IJ]}^{K} + \Omega_{IJ}{}^{K}, \tag{7.9.5}$$

它称为**挠率张量**。其张量性来源于其变换规律正符合三阶张量的法则（尽管$\Gamma_{IJ}^{K}$，$\Omega_{IJ}{}^{K}$都不是张量）：

$$\begin{aligned}
S_{I'J'}{}^{K'} &= \Gamma_{[I'J']}^{K'} + \Omega_{I'J'}{}^{K'} \\
&= A_{I'}^{I} A_{J'}^{J} A_{K}^{K'} \Gamma_{[IJ]}^{K} + A_{K}^{K'} \partial_{[I'} A_{J']}^{K} \\
&\quad + A_{I'}^{I} A_{J'}^{J} A_{K}^{K'} \Omega_{IJ}{}^{K} - A_{[I'}^{K} \partial_{J']} A_{K}^{K'} \\
&= A_{I'}^{I} A_{J'}^{J} A_{K}^{K'} (\Gamma_{[IJ]}^{K} + \Omega_{IJ}{}^{K}) \\
&= A_{I'}^{I} A_{J'}^{J} A_{K}^{K'} S_{IJ}{}^{K},
\end{aligned} \tag{7.9.6}$$

其中已考虑到

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_{I'} \delta_{J'}^{K'} = \partial_{I'} (A_{J'}^{K} A_{K}^{K'}) \\
&= A_{K}^{K'} \partial_{I'} A_{J'}^{K} + A_{J'}^{K} \partial_{I'} A_{K}^{K'},
\end{aligned} \tag{7.9.7}$$

对下标$I'J'$取反对称化，于是

$$0 = A_{K}^{K'} \partial_{[I'} A_{J']}^{K} + A_{[J'}^{K} \partial_{I']} A_{K}^{K'}$$

$$=A^{K'}_{K}\partial_{[I'}A^{K}_{J']}-A^{K}_{[I'}\partial_{J']}A^{K'}_{K}. \tag{7.9.8}$$

挠率是决定空间性质的张量，正是由于$S_{IJ}{}^{K}$使$\Gamma^{K}_{IJ}$偏离对称性。如果$S_{IJ}{}^{K}=0$，则$\Gamma^{K}_{IJ}$称为**对称对象**。但是应该注意，对称对象不一定关于下标为对称，正如在非完整系里$E_n$的联络对象也是非对称一样。我们讲过$\Gamma^{K}_{IJ}$的非对称性有两个来源，非对称性也可能来源于非完整系。仅当$S_{IJ}{}^{K}=0$，$\Omega_{IJ}{}^{K}=0$同时满足，对称对象才是关于下标为对称的。对称对象的实质在于空间的挠率为零。

挠率$S_{IJ}{}^{K}$的重要性质是决定在这空间里是否存在平行四边形，或者说平行四边形是否封口。我们将说明如下：为了摆脱由非空间性质的非完整系的因素带来的影响，现在考察完整系$(i)$，这时

$$S_{ij}{}^{k}=\Gamma^{k}_{[ij]}. \tag{7.9.9}$$

为了弄清$S_{ij}{}^{k}$也就是$\Gamma^{k}_{[ij]}$的实质，讨论两个无限邻近于$X$点的点$X_1$和$X_2$。将$\underset{1}{d}x^k$沿$\underset{2}{d}x^k$平行移动（按$\Gamma^{k}_{ij}$）到$X_2$点得：

$$\underset{1}{d}\bar{x}^{k}=\underset{1}{d}x^{k}-\Gamma^{k}_{ij}\underset{1}{d}x^{j}\underset{2}{d}x^{i}, \tag{7.9.10}$$

将$\underset{2}{d}x^k$沿$\underset{1}{d}x^k$平行移动到$X_1$点又得

$$\underset{2}{d}\bar{x}^{k}=\underset{2}{d}x^{k}-\Gamma^{k}_{ij}\underset{2}{d}x^{j}\underset{1}{d}x^{i}, \tag{7.9.11}$$




图 7-2

如果在$L_n$中存在平行四边形，则应该封口。计算

$$\begin{aligned} db^k &= -\underset{1}{d}x^k - \underset{2}{d}\bar{x}^k + \underset{2}{d}x^k + \underset{1}{d}\bar{x}^k \\ &= -\Gamma^k_{ij}\underset{1}{d}x^j\underset{2}{d}x^i + \Gamma^k_{ij}\underset{2}{d}x^j\underset{1}{d}x^i \\ &= \Gamma^k_{ij}(\underset{1}{d}x^i\underset{2}{d}x^j - \underset{1}{d}x^j\underset{2}{d}x^2) \\ &= 2\Gamma^k_{ij}\underset{1}{d}x^{[i}\underset{2}{d}x^{j]}, \end{aligned} \tag{7.9.12}$$

记双向量

$$df^{ij} \equiv 2\underset{1}{d}x^{[i}\underset{2}{d}x^{j]}, \tag{7.9.13}$$

它代表了由$\underset{1}{d}x^k$与$\underset{2}{d}x^k$所张成的有向面积元，于是

$$db^k = \Gamma^k_{[ij]}df^{ij} = S_{ij}{}^k\,df^{ij}. \tag{7.9.14}$$

由此看出，如果$S_{ij}{}^k \neq 0$，则$db^k \neq 0$。这四个一阶逆变向量不构成平行四边形。不封口向量来源于挠率张量。Cartan称具有不对称连络的空间为有挠率空间。当$S_{ij}{}^k = 0$，我们有**无挠率空间**，记为$L_n^0$。

在$E_n$中，向量$\mathbf{u}$从点$X_0$平移到点$X$的结果是唯一确定的，即与路径无关的。在$L_n$中，一阶逆变张量$u^i$沿曲线

$$x^i = x^i(t) \tag{7.9.15}$$

从$X$点平行移动至$X + dX$时，$u^i$的改变量的主要线性部分是

$$du^i = -\Gamma^i_{kj}u^j dx^k, \tag{7.9.16}$$

两边除以$dt$得

$$\frac{du^i}{dt} = -\Gamma^i_{kj}\,(x^m)u^j(x^r)\frac{dx^k}{dt}, \tag{7.9.17}$$

式中$\Gamma^i_{kj}$和$dx^k/dt$都是在曲线上给定的$t$的函数，如果令$u^i(X_0) = u^i_0$作为初值，则根据微分方程理论，(7.9.17)的解$u^i(X(t))$是唯一存在的。但是，沿不同的曲线平行移动结果$u^i(X(t))$一般是不同的。换言之，在$L_n$中，$u^i$沿闭曲线平行移动回到始点时的$u^i$一

般地和起始值不同。

如果$u^i(X)$的值与平移所沿的曲线无关，这时的$L_n$称为**有绝对平行性（或远平行性）的仿射连络空间**。在这样的空间里，在某点$X_0$任给向量$u^i(X_0)$，通过$\Gamma^k_{ij}(X)$所定义的平行移动，就得到定义在全空间的一个均匀向量场。反过来的问题是：设在空间的每一个点$X$任意给定$n$个线性无关的向量$u^i_{(p)}(X)(p=1,2,\cdots,n)$，亦即$n$个向量场，如果我们认为对每个固定的$(p)$，各点的向量$u^i_{(p)}$都是平行的（或者说该向量场是均匀的），则可以证明，对应于这种平行性的仿射连络$\Gamma^i_{jk}(X)$被唯一确定，且平行性是绝对的。因为每个$u^i_{(p)}$在任意无穷小平行移动中都必须满足

$$du^k_{(p)}=-\Gamma^k_{ij}u^j_{(p)}dx^i \tag{7.9.18}$$

或

$$\frac{\partial u^k_{(p)}(X)}{\partial x^i}=-\Gamma^k_{ij}u^j_{(p)}(X), \tag{7.9.19}$$

其中$\Gamma^k_{ij}$是待定的连络对象，而$u^i_{(p)}(X)$从而$du^k_{(p)}(X)/dx^i$是给定的。固定$k$和$i$，令$p$依次取$1,2,\cdots,n$值，我们得到含$n$个未知量$\Gamma^k_{i1}$，$\Gamma^k_{i2}$，$\cdots$，$\Gamma^k_{in}$的线性代数方程组(7.9.19)。按假定$u^j_{(p)}$是线性无关的，故(7.9.19)的系数行列式$\det u^j_{(p)}\neq 0$，因而可唯一地确定$\Gamma^k_{ij}$，$1\leqslant j\leqslant n$。变动$i$，$k$，重复上述步骤就可以求出全部的$\Gamma^k_{ij}$。由(7.9.19)可以看出，用这样的$\Gamma^k_{ij}$装备的$L_n$必定是有绝对平行性的。

无挠率的仿射连络空间和有绝对平行性的仿射连络空间并不是同义语。可以证明，无挠率和有绝对平行性的仿射连络空间至少在任意点$X$的某个领域里容许仿射坐标系，即$\Gamma^i_{jk}=0$。因此，同时具有这两种性质的仿射连络空间称为（局部）仿射空间。

在仿射连络空间里，绝对微分和协变导数的运算和§7.5节的公式(7.5.47)、(7.5.48)一样。

空间是否具有绝对平行性，当然取决于给定的$\Gamma^k_{ij}$。但这种依赖性不是直接的。而只依赖于一个由$\Gamma^k_{ij}$派生出来的量，称为曲率张量。关于这一点我们将在下一节详细讨论。

## §7.10 曲率张量 (Riemann-Christoffel 张量)

现在我们来讨论一下仿射连络空间的绝对平行性是如何取决于给定的仿射连络的。为此将(7.9.17)沿曲线从$t=0$到$t$对$\tau$积分得

$$\Delta u^i = u^i(t) - u^i(0) = -\int_0^t \Gamma^i_{kj}(\tau) u^j(\tau) \cdot \frac{dx^k(\tau)}{d\tau} d\tau, \qquad (7.10.1)$$

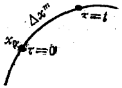


图 7-3

如果变量$\tau$从0到$t$只代表一小段曲线$\Delta x^m$，则我们可以将被积函数在$X(0)$展开，且只保留一阶小量，得到

$$\Gamma^i_{kj}(\tau) \simeq \Gamma^i_{kj}(0) + \partial_m \Gamma^i_{kj}|_{t=0} \Delta x^m, \qquad (7.10.2)$$

$$u^j(\tau) \simeq u^j(0) - \Gamma^j_{pq}(0) u^q(0) \Delta x^p, \qquad (7.10.3)$$

代入(7.10.1)式得

$$\Delta u^i = \int_0^t - [(\Gamma^i_{kj} u^j)_0 - (\Gamma^i_{kj} \Gamma^j_{pq} u^q)_0 \Delta x^p + (\partial_m \Gamma^i_{kj} u^j)_0 \Delta x^m] \frac{dx^k}{d\tau} d\tau$$

$$= -(\Gamma^i_{kj} u^j)_0 \Delta x^k + (-\partial_m \Gamma^i_{kj}$$

$$+\Gamma^i_{kp}\,\Gamma^p_{mj})_0 u^j(0)\int_0^t \Delta x^m \frac{dx^k}{d\tau}d\tau, \qquad (7.10.4)$$

如果上述积分的路径是一条不打结 的小闭 曲 线 $c$，$x^i(t)=x^i(0)$ $\Rightarrow \Delta x^i=0$，则上式第一项消失。

$$\Delta u^i \simeq (-\partial_m \Gamma^i_{kj}+\Gamma^i_{kp}\,\Gamma^p_{mj})_0 u^j(0)\oint_c \Delta x^m \frac{dx^k}{d\tau}d\tau. \qquad (7.10.5)$$

设张在闭曲线$c$上的曲面$D$可看成

$$x^i = x^i(v^a), \qquad a=1,2, \qquad (7.10.6)$$

其中$v^1$，$v^2$是参量，$\frac{dx^k}{d\tau}d\tau=\frac{\partial x^k}{\partial v^1}dv^1+\frac{\partial x^k}{\partial v^2}dv^2$，利用格林公式将闭曲线$c$上积分换成$D$面上的面积分，并注意到被积函数中$\Delta x^m =x^m(v^a)-x^m(0)$，而后一项$x^m(0)$与$v^a$无关，于是有

$$\begin{aligned}
&\oint \Delta x^m \frac{dx^k}{d\tau}d\tau \\
&=\oint \Delta x^m\left(\frac{\partial x^k}{\partial v^1}dv^1+\frac{\partial x^k}{\partial v^2}dv^2\right) \\
&=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial v^1}\left(\Delta x^m \frac{\partial x^k}{\partial v^2}\right)-\frac{\partial}{\partial v^2}\left(\Delta x^m \frac{\partial x^k}{\partial v^1}\right)\right]d\sigma \\
&=\iint_D\left(\frac{\partial x^m}{\partial v^1}\ \frac{\partial x^k}{\partial v^2}-\frac{\partial x^k}{\partial v^1}\ \frac{dx^m}{\partial v^2}\right)d\sigma \\
&=\iint_D 2\frac{\partial x^{[m}}{\partial v^1}\frac{\partial x^{k]}}{\partial v^2}d\sigma, \qquad (7.10.7)
\end{aligned}$$

记双向量$2\frac{\partial x^{[m}}{\partial v^1}\ \frac{\partial x^{k]}}{\partial v^2}$为$f^{mk}$，于是

$$\Delta u^i = -(\partial_{[m}\Gamma^i_{k]j}+\Gamma^i_{[m|p|}\Gamma^p_{k]j})_0 u^j(0)\iint_D f^{mk}d\sigma. \qquad (7.10.8)$$

在闭曲线收缩至$X_0$点的极限情况，上式变为

$$du^i=-(\partial_{[m}\Gamma^i_{k]j}+\Gamma^i_{[m|p|}\Gamma^p_{k]j})u^j df^{mk}, \tag{7.10.9}$$

记

$$R_{mkj}{}^i=2(\partial_{[m}\Gamma^i_{k]j}+\Gamma^i_{[m|p|}\Gamma^p_{k]j}) \tag{7.10.10}$$

我们得到

$$du^i=-\frac{1}{2}R_{mkj}{}^i u^j df^{mk}. \tag{7.10.11}$$

这公式表明，将$u^i$绕小闭回路平行移动一周，分量的增量取决于四指标的量$R_{mkj}{}^i$（可以证明它是四阶张量），称为**曲率张量或 Riemann-Christoffel 张量**。仿射空间是否有绝对平行性，由曲率张量**R**是否为零决定。因此曲率张量**R**是刻划仿射连络空间离开绝对平行性的度量。

我们还可以从另一个角度看看$R_{ijk}{}^m$的意义。我们知道，和偏导数不同，对于非完整系，即使在$E_n$里 Pfaff 导数(7.6.6)的次序也不可交换：

$$\partial_{[I}\partial_{J]}=-\Omega_{IJ}{}^K\partial_K\neq 0. \tag{7.10.12}$$

现在，从更一般的仿射连络空间$L_n$角度来考虑这一问题。我们将证明，协变导数是否可交换，不仅取决于$\Omega_{IJ}{}^K$，而且还来源于$\Gamma^K_{IJ}$所代表的平行移动性质本身，即空间性质本身。

为此，先具体看一个例子。用“$\nabla_I$”代表“$;_I$”，则

$$\begin{aligned}\nabla_J\nabla_I u^K&=\partial_J(\nabla_I u^K)+\Gamma^K_{JL}\nabla_I u^L-\Gamma^L_{JI}\nabla_L u^K\\&=\partial_J(\nabla_I u^K+\Gamma^K_{IM}u^M)+\Gamma^K_{JL}(\partial_I u^L+\Gamma^L_{IM}u^M)\\&\quad-\Gamma^L_{JI}\nabla_L u^K\\&=\partial_J\partial_I u^K+\partial_J\Gamma^K_{IM}u^M+2\Gamma^K_{(I|M|}\partial_{J)}u^M\\&\quad-\Gamma^L_{JI}\nabla_L u^K+u^M\Gamma^K_{JL}\Gamma^L_{IM},\end{aligned} \tag{7.10.13}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{[J}\nabla_{I]}u^K&=\partial_{[J}\partial_{I]}u^K+\partial_{[J}\Gamma^K_{I]M}u^M-\Gamma^L_{[JI]}\nabla_L u^K\\&\quad+u^M\Gamma^K_{[J|L|}\Gamma^L_{I]M},\end{aligned} \tag{7.10.14}$$

但

$$\partial_{[J}\partial_{I]}u^K = A^j_{[J}\partial_{|j|}(A^i_{I]}\partial_i u^K)$$
$$= A^j_{[J}\partial_{|j|}A^i_{I]}\partial_i u^K + A^j_{[J}A^i_{I]}\partial_j\partial_i u^K$$
$$= \partial_{[J}A^i_{I]}\partial_i u^K + A^j_J A^i_I \partial_{[j}\partial_{i]}u^K$$
$$= \partial_{[J}A^i_{I]}A^M_i\partial_M u^K$$
$$= -\Omega_{JI}{}^M\partial_M u^K$$
$$= -\Omega_{JI}{}^L(\nabla_L u^K - \Gamma^K_{LM}u^M), \tag{7.10.15}$$

于是

$$\nabla_{[J}\nabla_{I]}u^K = (\partial_{[J}\Gamma^K_{I]M} + \Gamma^K_{[J|L|}\Gamma^L_{I]M} + \Omega_{JI}{}^L\Gamma^K_{LM})u^M$$
$$- (\Gamma^L_{[JI]} + \Omega_{JI}{}^L)\nabla_L u^K$$
$$= \frac{1}{2}R_{JIM}{}^K u^M - S_{JI}{}^L\nabla_L u^K. \tag{7.10.16}$$

同样可证

$$\nabla_{[J}\nabla_{I]}u_M = -\frac{1}{2}R_{JIM}{}^K u_K - S_{JI}{}^L\nabla_L u_M, \tag{7.10.17}$$

其中在非完整系$(I)$里

$$R_{IJM}{}^K = 2(\partial_{[J}\Gamma^K_{I]M} + \Gamma^K_{[J|L|}\Gamma^L_{I]M} + \Omega_{JI}{}^L\Gamma^K_{LM}), \tag{7.10.18}$$

曲率张量$R_{IJM}{}^K$关于前两个下标为反称。可见，协变导数是否可交换次序依赖于非完整对象$\Omega_{IJ}{}^K$和由仿射连络派生的曲率张量$R_{IJK}{}^L$以及挠率张量$S_{IJ}{}^K = \Gamma^K_{[IJ]} + \Omega_{IJ}{}^K$，即不仅依赖于坐标系是否完整系，而且依赖于空间的性质本身。对于无挠率空间，(7.10.16)和(7.10.17)式简化为

$$\nabla_{[J}\nabla_{I]}u^K = \frac{1}{2}R_{JIM}{}^K u^M, \tag{7.10.19}$$

$$\nabla_{[J}\nabla_{I]}u_M = -\frac{1}{2}R_{JIM}{}^K u_K. \tag{7.10.20}$$

只有曲率张量为零时，协变导数才是可交换的。如果是无挠率空

间 $L_n^0$，且在完整系$(i)$中，则

$$R_{ijk}{}^{l}=2(\partial_{[i}\Gamma^{l}_{j]k}+\Gamma^{l}_{[i|p|}\Gamma^{p}_{j]k}). \tag{7.10.21}$$

这时可以证明曲率张量满足

（1） Ricci 恒等式

$$R_{ijk}{}^{l}+R_{jki}{}^{l}+R_{kij}{}^{l}=0, \tag{7.10.22}$$

（2） Bianchi-Padova恒等式

$$\nabla_i R_{jkl}{}^{p}+\nabla_j R_{kil}{}^{p}+\nabla_k R_{ijl}{}^{p}=0. \tag{7.10.23}$$

## §7.11 黎曼空间Vn

像欧氏空间$R_n$是在仿射空间$E_n$引进度量张量的结果一样，引进度量张量

$$g_{ij}(X)=g_{ij}(x^1,x^2,\cdots,x^n) \tag{7.11.1}$$

将使流形$\mathfrak{M}_n$变成黎曼空间$V_n$。度量张量是二阶协变、对称和非退化张量

$$g_{ij}=g_{ji},\ \det g_{ij}\neq 0. \tag{7.11.2}$$

根据§7.8所叙述的，流形$\mathfrak{M}_n$和仿射切空间$A_n$的对应关系是

$$u^i,v^i\in\mathfrak{M}_n\longleftrightarrow \mathbf{u},\mathbf{v}\in A_n \tag{7.11.3}$$

在$A_n$中通过(7.11.1)引进标量积

$$\mathbf{u}\mathbf{v}=g_{ij}u^iv^j, \tag{7.11.4}$$

这样，黎曼空间$V_n$的仿射切空间$A_n$就变成欧氏空间。

在引进$g_{ij}$以后，$E_n$变成$R_n$，后者在曲线坐标系里的第一、第二类Christoffel符号完全由度量张量确定。在黎曼空间$V_n$中也有类似情况，它的连络对象（如果要引进的话）也是不能任给的，在无挠率$S_{ij}{}^{k}=0$，即连络对象为对称

$$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji} \tag{7.11.5}$$

的条件下，连络对象由$g_{ij}$唯一确定。其理由如下：我们将在$X$点

的$u^i$和$v^j$进行平移

$$du^i=-\Gamma^i_{jk}u^k dx^j,\quad dv^i=-\Gamma^i_{jk}v^k dx^j, \tag{7.11.6}$$

其中$\Gamma^i_{jk}$是待求的连络系数。作为标量，$g_{ij}u^iv^j$经过平移后的增量为零，即

$$0=d(g_{ij}u^iv^j)=dg_{ij}u^iv^j+g_{ij}du^iv^j+g_{ij}u^idv^j. \tag{7.11.7}$$

设$g_{ij}\in C^1$，则考虑到(7.11.6)之后上式变为

$$(g_{ij,p}-g_{kj}\Gamma^k_{pi}-g_{ik}\Gamma^k_{pj})u^iv^jdx^p=0, \tag{7.11.8}$$

根据$u^i$，$v^j$和$dx^p$的任意性，上式给出

$$g_{ij,p}-g_{kj}\Gamma^k_{pi}-g_{ik}\Gamma^k_{pj}=0, \tag{7.11.9}$$

如果引入

$$\Gamma_{ijk}=\Gamma^l_{ij}g_{kl} \tag{7.11.10}$$

则由(7.11.5)和(7.11.9)就可唯一地得到相同于(7.7.33)的结果

$$\Gamma_{ijk}=\frac{1}{2}(g_{jk,i}+g_{ki,j}-g_{ij,k}), \tag{7.11.11}$$

从而，$V_n$的连络系数（在对称的条件下）就唯一地被$g_{ij}$所确定。

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{kl}(g_{jl,i}+g_{li,j}-g_{ij,l}). \tag{7.11.12}$$

这样所得到的$V_n$的无挠率的连络对象称为**黎曼连络**。

## §7.12 度量空间$M_n$

在$E_n$中引进标量积（其中有正定性）等价于引进正定的协变度量张量。这时$E_n$就变成欧氏空间$R_n$了。但是在仿射连络空间$L_n$中，没有向量的概念，不能定义标量积。故我们只能像上一节那样直接引入点函数$g_{ij}(X)$。我们放弃$g_{ij}$正定的条件而保留加于$g_{ij}$的对称性的限制

$$g_{ij}=g_{ji}. \tag{7.12.1}$$

这样，我们就得到**度量空间**$M_n$，它是$L_n$引进$g_{ij}$后的最一般的空

间。当然较$V_n$更为一般。因为在从$L_n$引进度量张量$g_{ij}$而得到黎曼空间$V_n$的过程中，我们实际上还假设了

（1） 连络对象为对称：$S_{ij}{}^k=0$，

（2） $g_{ij}u^iv^j$平移后的增量为零，即(7.11.7)式。它又可写成

$$\nabla_i g_{jk}=0. \qquad (7.12.2)$$

现在我们已放弃这两条假定，于是一般地$\nabla_i g_{jk}\neq 0$，记

$$\nabla_i g_{jk}=-Q_{ijk} \qquad (7.12.3)$$

称为$Q$-张量。可以证明它是三阶张量。在非完整系里则有

$$\nabla_I g_{JK}=-Q_{IJK} \qquad (7.12.4)$$

或者

$$-Q_{ijk}=\partial_i g_{jk}-g_{pk}\Gamma^p_{ij}-g_{jp}\Gamma^p_{ik}, \qquad (7.12.5)$$

$$-Q_{IJK}=\partial_I g_{JK}-g_{PK}\Gamma^P_{IJ}-g_{JP}\Gamma^P_{IK}. \qquad (7.12.6)$$

可见，$Q$-张量依赖于引进$L_n$的$g_{ij}$和$\Gamma^k_{ij}$。在欧氏空间里，从$\Gamma^i_{jk}$的定义可以得$[ij\ k]$和$\left\{\begin{matrix}k\\ ij\end{matrix}\right\}$的表达式。下面我们求在$M_n$中的相应的结果。由(7.12.5)经指标轮换$i\to j\to k\to i$得

$$-Q_{jki}=\partial_j g_{ki}-g_{pi}\Gamma^p_{jk}-g_{kp}\Gamma^p_{ji}, \qquad (7.12.7)$$

$$-Q_{kij}=\partial_k g_{ij}-g_{pj}\Gamma^p_{ki}-g_{ip}\Gamma^p_{kj}, \qquad (7.12.8)$$

将(7.12.5)加上(7.12.8)减去(7.12.7)并引进Schouten记号

$$\psi_{\{kij\}}\overset{\text{df}}{=}\psi_{kij}+\psi_{jki}-\psi_{ijk} \qquad (7.12.9)$$

和

$$g_{kij}\overset{\text{df}}{=}\frac{1}{2}\partial_k g_{ij}, \qquad (7.12.10)$$

$$S_{kij} \stackrel{\mathrm{df}}{=} g_{jp}\Gamma^{p}_{[ki]}, \qquad (7.12.11)$$

得

$$-g_{jp}\Gamma^{p}_{ik} + g_{jp}\Gamma^{p}_{[ik]} - g_{kp}\Gamma^{p}_{[ij]} + g_{ip}\Gamma^{p}_{[jk]} + g_{\{ijk\}}$$

$$= -\frac{1}{2}Q_{\{ijk\}} \qquad (7.12.12)$$

从而得到连络对象的表达式

$$\Gamma^{k}_{ij} = g^{kr}\left(g_{\{irj\}} - S_{\{irj\}} + \frac{1}{2}Q_{\{irj\}}\right). \qquad (7.12.13)$$

在非完整系里，由于

$$S_{IJ}{}^{K} = \Gamma^{K}_{[IJ]} + \Omega_{IJ}{}^{K}, \qquad (7.12.14)$$

$$\Gamma^{K}_{[IJ]} = S_{IJ}{}^{K} - \Omega_{IJ}{}^{K}, \qquad (7.12.15)$$

相应地有

$$\Gamma^{K}_{IJ} = g^{KP}\left(g_{\{IPJ\}} - S_{\{IPJ\}} + \Omega_{\{IPJ\}} + \frac{1}{2}Q_{\{IPJ\}}\right), \qquad (7.12.16)$$

其中

$$\Omega_{IJK} = g_{KP}\Omega_{IJ}{}^{P}. \qquad (7.12.17)$$

经常将关于$i,j$为对称的$g_{\{ikj\}}$和$g^{kr}g_{\{irj\}}$记为

$$[ij\ k] \equiv g_{\{ikj\}}, \qquad (7.12.18)$$

$$\left\{ {k \atop ij} \right\} \equiv g^{kr}g_{\{irj\}}, \qquad (7.12.19)$$

并称为第一、第二类Christoffel符号。从(7.12.13) 可以看到，当$S_{ij}{}^{k}=0$和$Q_{ijk}=0$时，$M_n$退化为$V_n$，而连络对象(7.12.13)或(7.12.16)退化为黎曼连络。

从 $M_n$ 出发加上各种限制条件我们还可以得到下列各种空间：

当$Q_{ijk}$或$Q_{IJK}$可表成$Q_{ijk}=Q_i g_{jk}$或$Q_{IJK}=Q_I g_{JK}$，这样的$M_n$称为**有半度量连络的空间**。

如果进一步加上$S_{ij}{}^k=0$的限制，则称为 **Weyl 空间**，记为$W_n$。

当$Q_{ijk}=0$，即满足$\nabla_i g_{jk}=0$，但$S_{ij}{}^k\neq 0$，这样的空间称为有度量连络的空间或**Cartan空间**，记为$C_n$。$C_n$的连络表达式为

$$\Gamma^k_{ij}=g^{kr}(g_{\{irj\}}-S_{\{irj\}}) \tag{7.12.20}$$

或在非完整系$(I)$里

$$\Gamma^K_{IJ}=g^{KP}(g_{\{IPJ\}}-S_{\{IPJ\}}+\Omega_{\{IPJ\}}). \tag{7.12.21}$$

在§7.11和本节至今的讨论未涉及由连络对象所派生的曲率张量

$$R_{jik}{}^l=2(\partial_{[j}\Gamma^l_{i]k}+\Gamma^l_{[j|n|}\Gamma^n_{i]k}) \tag{7.12.22}$$

或

$$R_{JIK}{}^L=2(\partial_{[J}\Gamma^L_{I]K}+\Gamma^L_{[J|N|}\Gamma^N_{I]K}+\Omega_{JI}{}^N\Gamma^L_{NK}). \tag{7.12.23}$$

从§7.10里我们知道，有绝对平行性的仿射空间$L_n$的曲率张量等于零。在那里平行移动与路径无关。

有绝对平行性的度量空间（即引进度量张量后）称为**平坦空间**。如果平坦空间的连络为对称，且存在这样的坐标系$(i)$或非完整系$(I)$使得

$$g_{ij}=\text{常数} \quad \text{或} \quad g_{IJ}=\text{常数}, \tag{7.12.24}$$

则我们有

（1） 欧氏空间$R_n$，若$g_{ij}v^iv^j>0$，$\forall v^i$。

（2） **Minkowski空间**，若$g_{ij}v^iv^j\leqslant 0$，$\forall v^i$。

满足$Q_{ijk}=0$，但$S_{ij}{}^k\neq 0$的平坦空间称为有远平行性的空间。

于是我们有下面的各种度量空间的分类表：

表7-1 各种度量空间分类

| 称名 \ 特征量 | $R$ | $S$ | $Q$ |
|---|---|---|---|
| 度量空间$M_n$ | $\neq 0$ | $\neq 0$ | $\neq 0$ |
| 有半度量连络的空间 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | $Q_{ijk}=Q_i g_{jk}$ |
| Weyl空间$W_n$ | $\neq 0$ | $=0$ | $Q_{ijk}=Q_i g_{jk}$ |
| Cartan空间$C_n$ | $\neq 0$ | $\neq 0$ | 0 |
| 平坦空间 | 0 | $\neq 0$ | $\neq 0$ |
| 有远平行性的平坦空间 | 0 | $\neq 0$ | 0 |
| 黎曼空间$V_n$ | $\neq 0$ | 0 | 0 |
| 欧氏空间$R_n$ | 0 | 0 | $Q=0$，$g_{ij}v^i v^j>0$，$\forall v^i$ |
| Minkowski空间 | 0 | 0 | $Q=0$，$g_{ij}v^i v^j\leqslant 0$，$\forall v^i$ |

# 第八章　微分几何与缺陷理论

在上一章我们讨论了各种各样的空间，其中空间的本质主要由两个量决定：一个是度量张量，它定义了空间中距离的含义；另一个是连络对象，与之相联系的还有两个重要的量：(1) Riemann-Christoffel张量或曲率张量$R_{ijk}{}^{l}$，(2) Cartan张量或挠率张量$S_{mlk}$。这两个量是根据连络系数$\Gamma^{k}_{ml}$定义的。此外还有第三个重要的量$Q$-张量，它可用度量和连络对象表示。

所有这三个重要的量都不为零的空间是最一般的度量空间。如果$Q$-张量为零，这是Cartan空间；如果曲率张量为零，空间是平坦的可积的；如果挠率张量为零，空间的连络是对称的；如果挠率和$Q$-张量为零，这是众所周知的黎曼空间，在其中连络系数变成完全由度量张量决定的Christoffel符号。最后，如果所有三个重要的量都为零，这就是欧氏空间。前面的几种空间在自然界中并不直接存在。自然界发生的现象就小范围、局部而言，都可以说是发生在三维欧氏空间$R_3$之中的。也就是说，缺陷变形之后也仍然是处在三维欧氏空间之中的。

但是，我们通过一些办法把它与种种非欧空间对应起来，这时微分几何的一些概念就可以用来刻划缺陷理论。以二维情况为例，设一块在二维欧氏空间$R_2$的平板由于不均匀升温、相互间膨胀而产生热应力。这种内应力的大小来自温度的不均匀分布。如果将平板切成微元，释放而使每个微元都处于无内应力的自然状态。一般而言，我们再也不能把各微元拼合成一块整体处于无应力的自然状态的平板了。但是，如果想象允许它翘曲，它会隆起

而变成一个曲面。这时它就是浸在三维欧氏空间$R_3$中的二维黎曼空间。微分几何的理论已有证明，$n$ 维黎曼空间$V_n$总可以浸入到$n(n+1)/2$ 维的欧氏空间之中。由这种直观的想象我们可以建立变形后有缺陷的物体与黎曼空间的对应，通过黎曼空间上的种种几何量对缺陷作形象的描述。当然，对三维物体形象不是那么直观，而且为了描述更复杂的缺陷，停留在黎曼空间上是不够的。为此，我们仅保留每个质点的当前位置坐标$x^i$作为编号，因而它只被看作是三维流形$\mathfrak{M}_3$，而留下很大的自由度，允许我们根据物理事实引进仿射连络$\Gamma^k_{ij}$或度量张量$g_{ij}$来刻划实际晶体中的缺陷特征——Burgers 向量、Frank 向量、位错密度张量、向错密度张量等等。这就是本章的目的。

## §8.1 内应力理论

在本理论中给定的是非协调的塑性应变$\mathbf{e}^P$。因为假设整体应变应是协调的，$\mathbf{e}^T$满足协调方程

$$\nabla\times\mathbf{e}^T\times\nabla=0. \tag{8.1.1}$$

引进非协调度张量

$$\boldsymbol{\eta}=-\nabla\times\mathbf{e}^P\times\nabla=\nabla\times\mathbf{e}\times\nabla, \tag{8.1.2}$$

来描述塑性应变偏离协调的程度，它同时反映了弹性应变也是非协调的。

我们知道每一个向量都可以与一个反对称的二阶张量等价，它们称为彼此对偶的。这种等价的对偶形式可推广到更高阶的张量。形象地说一个指标可以和两个反对称的指标等价。因此，为了下面讨论的需要，可以令上述的二阶非协调度张量$\boldsymbol{\eta}$与一个两对指标反称的四阶张量等价。(8.1.2)的分量形式是

$$\eta_{ij}=\epsilon_{irs}\partial_r e_{sp,q}\epsilon_{pqj}, \tag{8.1.3}$$

于是可以引进它的对偶

$$
\begin{aligned}
G_{mnuv} &\overset{\text{df}}{=} \epsilon_{mni}\eta_{ij}\epsilon_{juv} \\
&= \epsilon_{mni}\epsilon_{irs}\partial_r e_{sp,q}\epsilon_{pqj}\epsilon_{juv} \\
&= (\delta_{mr}\delta_{ns}-\delta_{ms}\delta_{nr})\partial_r e_{sp,q}(\delta_{pu}\delta_{qv}-\delta_{pv}\delta_{qu}) \\
&= (\partial_m e_{np,q}-\partial_n e_{mp,q})(\delta_{pu}\delta_{qv}-\delta_{pv}\delta_{qu}) \\
&= 2\partial_{[m}e_{n]p,q}(\delta_{pu}\delta_{qv}-\delta_{pv}\delta_{qu}) \\
&= 4\partial_{[m}e_{n][u,v]},
\end{aligned}
\tag{8.1.4}
$$

方括号表示对括起来的指标求反对称化（见§7.2），$G_{mnuv}$ 称为**四阶非协调度张量**．易证明反过来我们有

$$
\eta_{ij}=\frac{1}{4}\epsilon_{imn}G_{mnuv}\epsilon_{uvj}. \tag{8.1.5}
$$

因此二阶或四阶的非协调度张量都可以用来完全刻划内应力理论．

现在设想已变了形的物体处在三维欧氏空间$R_3$中．不失一般性，在这个三维欧氏空间$R_3$中采用直角笛卡尔坐标系（$i$），度量张量是$g_{ij}=\delta_{ij}$，每个线素$dx^i$变形后的现实长度的平方是

$$
ds^2=\delta_{ij}dx^i dx^j. \tag{8.1.6}
$$

设想将变形后的物体切成微元（当然每一微元又相当大，足以包含大量粒子），并让它们不受约束地变成（释放至）应力为零的**自然状态**，即弹性变形完全恢复，这时线素的长度是

$$
d\mathring{s}^2=\delta_{IJ}dX^I dX^J=\delta_{IJ}B^I_i B^J_j dx^i dx^j=g_{ij}dx^i dx^j, \tag{8.1.7}
$$

这里设想在物体弹性变形完全恢复而得到的自然状态中仅保留了物质点的坐标$x^i$作为编号，因此它是三维流形$\mathfrak{M}_3$，在其中引进非完整系$(I)$，$B^I_i$是从$(I)$到$(i)$的变换系数．于是

$$
g_{ij}=\delta_{IJ}B^I_i B^J_j \tag{8.1.8}
$$

也可以看成是在自然状态的$\mathfrak{M}_3$中引进的度量．这样，$\mathfrak{M}_3$就变成了度量空间$M_3$，进而我们可以说它还是一个黎曼空间$V_3$．通过这种方法我们建立了处于欧氏空间中的变形后物体与虚拟的自然状

态中以$g_{ij}$为度量的黎曼空间$V_3$的对应关系。

现在我们找出度量张量 $g_{ij}$ 与刻划变形的量之间的关系，这是很容易的事。因为从小变形理论知道弹性应变张量可以从下式得到

$$ds^2-d\mathring{s}^2=(\delta_{ij}-g_{ij})dx^i dx^j=2e_{ij}dx^i dx^j, \qquad (8.1.9)$$

于是

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(\delta_{ij}-g_{ij}). \qquad (8.1.10)$$

代入四阶非协调度张量有

$$G_{mnuv}=-2\partial_{[m}g_{n][u,v]}. \qquad (8.1.11)$$

另一方面，在虚拟的自然状态的黎曼空间$V_3$中，Riemann-Christoffel张量完全由度量张量$g_{ij}$决定了，它可以表成

$$R_{ijk}{}^{l}=2(\partial_{[i}\Gamma^{l}_{j]k}+\Gamma^{l}_{[i|p|}\Gamma^{p}_{j]k}), \qquad (8.1.12)$$

或用度量张量降指标得到

$$R_{mnuv}=g_{pv}R_{mnu}{}^{p}$$

$$=2g_{pv}(\partial_{[m}\Gamma^{p}_{n]k}+\Gamma^{p}_{[m|q|}\Gamma^{q}_{n]u})$$

$$=2(\partial_{[m}\Gamma_{n]uv}+\Gamma_{[m|qv|}\Gamma^{q}_{n]u}). \qquad (8.1.13)$$

因为

$$\Gamma_{nuv}=\frac{1}{2}(g_{uv,n}+g_{vn,u}-g_{un,v}) \qquad (8.1.14)$$

代入并加以线性化即只保留(8.1.13)式中前两项得到

$$R_{mnuv}=\partial_{[m}(g_{|uv|,n]}+g_{n[v;u}+g_{n]u,v}). \qquad (8.1.15)$$

在黎曼空间$V_3$中，Riemann-Christoffel 曲率张量是关于后两个指标为反对称的，因为

$$0=\nabla_{[m}\nabla_{n]}g_{uv}=-\frac{1}{2}R_{mnu}{}^{p}g_{pv}-\frac{1}{2}R_{mnv}{}^{p}g_{up}$$

$$=\frac{1}{2}(R_{mnuv}+R_{mnvu}). \qquad (8.1.16)$$

将此式代入(8.1.15)再与(8.1.11)比较得到

$$R_{mnuv}=R_{mn[uv]}=-2\partial_{[m}g_{n][u,v]}=G_{mnuv}. \qquad (8.1.17)$$

可以看到，内应力理论的四阶非协调度张量正是将微元释放后所得的引进度量的黎曼空间的曲率张量的线性化。

如果我们将四阶非协调度张量代入 (3.1.9) 的关于二阶非协调度张量的连续性方程中，我们得到

$$\epsilon_{imn}G_{mnuv;j}\epsilon_{juv}=0. \qquad (8.1.18)$$

上式也可写成

$$\epsilon_{imn}G_{mn[uv;j]}=0. \qquad (8.1.19)$$

注意到$G_{mnuv}$关于前两个指标的反对称，在上式乘上$\epsilon_{pqi}$并求和，化简得

$$\begin{aligned}&\epsilon_{pqi}\epsilon_{imn}G_{mn[uv;j]}\\&=(\delta_{pm}\delta_{qn}-\delta_{pn}\delta_{qm})G_{mn[uv;j]}\\&=G_{pq[uv;j]}-G_{qp[uv;j]}\\&=2G_{pq[uv;j]}=0.\end{aligned} \qquad (8.1.20)$$

将(8.1.17)代入(8.1.20)中得到

$$R_{mn[uv;j]}=0. \qquad (8.1.21)$$

后者正是微分几何中众所周知的 Bianchi 恒等式。因此，黎曼空间中 Riemann-Christoffel 张量的 Bianchi 恒等式正对应于内应力理论的连续性方程。这样，我们建立了内应力理论与自然状态中的黎曼几何的完全对应。

在建立上面的对应时，我们实际上采取了三个步骤：第一、通过对偶关系找到四阶非协调度张量，它和二阶非协调度张量完全等价。用四阶非协调度张量我们更容易找到它和微分几何相应的几何量的对应。第二、我们将物体微元释放至无应力的自然状态。自然状态是一种想象的状态，它可以是从初始（未变形）状态出发，仅给予它塑性变形而得到；也可以等价地由最后（变形

后）状态令弹性变形完全恢复而得到。因此我们引进了变形物体的三种状态，自然状态不能实际存在于欧氏空间之中，因为它有一个非零的曲率张量。然而，我们可以认为物体的自然状态是存在于一个想象的以 $g_{ij}$ 为度量的黎曼空间之中。第三、我们进行了线性化。这包括两个方面：一方面对变形的描述采用无穷小变形理论，即长度的变化与小应变张量有关系式(8.1.9)；另一方面，我们在想象的黎曼空间中也采用了线性化，即在(8.1.13)式中略去了$\Gamma_{mnl}$的二次项。通过这三个步骤我们终于找到了内应力理论与自然状态中的黎曼空间的完全对应。下面我们将遵循这一思路对更一般的缺陷进行讨论。

当然，这个内应力理论仍是比较含糊的理论。首先，在线性化中丢掉了$\Gamma_{mnl}$的乘积项，这要求不仅 $e_{mn}$ 本身，而且 $e_{mn,l}$ 也是小量。其次，当存在于 $R_3$ 空间的物体被释放到黎曼空间$V_3$，是否能使应力全为零？也就是说是否能达到自然状态？如果做得到才会有上面的结果。此外，在自然状态中仅保留物质点的坐标$x^i$作为编号的三维流形$\mathfrak{M}_3$中引入度量 $g_{ij}$ 之后，一般地得到的是度量空间 $M_3$，我们在前面说可以认为它还是个黎曼空间$V_3$。在黎曼空间$V_3$中挠率 $S_{mlk}$ 应等于零，这也是先验的。在上述讨论中，如果$S_{mlk}\neq 0$，这样就不是 $V_3$ 而是 Cartan空间$C_3$了。因此所建立的对应是增加了上述限制条件之后才能实现的。

## §8.2 位错理论

我们遵循上一节的思路讨论位错理论和微分几何的对应。在位错理论中，给定的是塑性应变$\mathbf{e}^P$和塑性转动$\boldsymbol{\omega}^P$（或其梯度塑性弯扭张量$\boldsymbol{\Xi}^P$）。描述位错的主要的量是位错密度张量

$$\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\mathrm{df}}{=} -\boldsymbol{\beta}^P \times \boldsymbol{\nabla} = -(\mathbf{e}^P + \mathbf{W}^P) \times \boldsymbol{\nabla}$$

$$= -\mathbf{e}^P \times \nabla + (\mathrm{tr}\Xi^P)\mathbf{I} - \Xi^{P*}, \tag{8.2.1}$$

或等价的 Nye 张量

$$\mathbf{K} = -\nabla \times \mathbf{e}^P + \boldsymbol{\omega} \otimes \nabla = -\nabla \times \mathbf{e}^P + \Xi^P. \tag{8.2.2}$$

通过对偶关系引进三阶的位错密度张量

$$\alpha_{mlk} \overset{\mathrm{df}}{=} \beta^P_{k[l,m]}, \tag{8.2.3}$$

它和由 (8.2.1) 表示的二阶位错密度张量的关系是

$$\alpha_{ij} = \epsilon_{jrs}\alpha_{rsi}, \tag{8.2.4}$$

或

$$\alpha_{ijk} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijl}\alpha_{kl}. \tag{8.2.5}$$

将(8.2.4)代入连续性方程(3.2.4)得

$$(\epsilon_{krs}\alpha_{rsi})_{,k} = \partial_k\alpha_{rsi}\epsilon_{krs} = \partial_{[k}\alpha_{rs]i} = 0, \tag{8.2.6}$$

即三阶位错密度张量满足连续性方程

$$\partial_{[k}\alpha_{rs]i} = 0. \tag{8.2.7}$$

由于总畸变$\beta^T$是协调的，故又得到三阶位错密度的基本几何法则

$$\beta_{k[l,m]} = \alpha_{mlk}. \tag{8.2.8}$$

类似于二阶非协调度张量$\boldsymbol{\eta}$（见(3.2.2)）

$$\boldsymbol{\eta} = (\nabla \times \boldsymbol{\alpha})^S, \tag{8.2.9}$$

可引进四阶非协调度张量

$$G_{mnlk} = 4(\partial_m\alpha_{lkn})^S_{[mn][lk]}$$

$$\equiv 2(\partial_m\alpha_{lkn} + \partial_l\alpha_{mnk})_{[mn][lk]}, \tag{8.2.10}$$

式中上标$S$表示如同(8.2.10)式中第二个恒等式所表示的关于指标对$[m,n]$和$[lk]$的对称化，方括号$[mn]$表示对指标$m$和$n$的反称化。$G_{mnlk}$ 与二阶非协调度张量$\boldsymbol{\eta}$的关系是

$$G_{mnkl} = \epsilon_{pmn}\epsilon_{qkl}\eta_{pq}, \tag{8.2.11}$$

或

$$\eta_{pq} = \frac{1}{4}\epsilon_{pmn}\epsilon_{qkl}G_{mnkl}. \tag{8.2.12}$$

我们将看到三阶位错密度张量将与引进的 Cartan 空间的相应的几何量对应起来。

为此，我们把变形体看成晶体，变形后带位错的实际晶体是安放（浸）在三维欧氏空间$R_3$里的。不失一般性，在这个三维欧氏空间$R_3$中采用直角坐标系$(i)$，实际晶体的各点用它在$R_3$的坐标$x^i$来编号。如果仅仅保留这个编号，实际晶体就变成具有完整坐标系$(i)$的三维缺陷物质流形$\mathfrak{M}_3$。设想将实际晶体切成微元（但同时又相当大以足以包含大量粒子），并让它不受约束地释放成应力为零的自然状态。这些处在自然状态的微元在空间可以任意分布，可以部分重叠或彼此分离。因此，这个处于自然状态的微元集合（称为**自然框架**）的各点不存在坐标系$X^I=X^I(x^i)$，

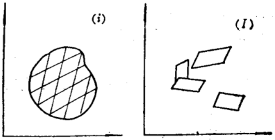



图 8-1

即$(I)$是一非完整系。但我们仍有线素$dx^i$和$dX^I$的1-1对应：$dx^i\leftrightarrow dX^I$。我们设想这种对应有线性的关系

$$dX^I=B^I_i dx^i \tag{8.2.13}$$

和

$$dx^i=B^i_I dX^I, \tag{8.2.14}$$

其中假设$B^I_i$和$B^i_I$是$x^i$的连续函数。问题是如何引入度量$g_{ij}$和连络$\Gamma^k_{ij}$使这个三维流形$\mathfrak{M}_3$变成某种空间。

设线素$dx^2$的自然状态的长度为$d\mathring{s}$，则

$$d\mathring{s}^2=\delta_{IJ}dX^I dX^J, \tag{8.2.15}$$

将(8.2.13)代入又有

$$d\mathring{s}^2=\delta_{IJ}B^I_iB^J_jdx^idx^j\equiv g_{ij}dx^idx^j,\tag{8.2.16}$$

即我们仍可将长度$d\mathring{s}$表成为$dx^i$的二次型，只是系数变成

$$g_{ij}=\delta_{IJ}B^I_iB^J_j.\tag{8.2.17}$$

这是决定自然状态线素的长度的正定对称张量。但是，注意到释放后的线素$dX^I$的位置和方向都可以是任意的，我们仍要证明这个对称正定张量$g_{ij}$并不因自然框架里微元的位置和方向可以任意改变而变化。这是容易证明的，因为设$dX^I$在另一新位置有第二种方向:

$$dX^{I'}=Q^{I'}_IdX^I=Q^{I'}_IB^I_idx^i,\tag{8.2.18}$$

这里$Q^{I'}_I$是正交张量，即满足

$$\delta_{I'J'}Q^{I'}_IQ^{J'}_J=\delta_{IJ},\tag{8.2.19}$$

于是在新的位置

$$\begin{aligned}d\mathring{s}^2&=\delta_{I'J'}dX^{I'}dX^{J'}\\&=\delta_{I'J'}Q^{I'}_IQ^{J'}_JB^I_iB^J_jdx^idx^j\\&=\delta_{IJ}B^I_iB^J_jdx^idx^j\\&=g_{ij}dx^idx^j,\end{aligned}\tag{8.2.20}$$

果然，$g_{ij}$是不受释放后微元的位置和方向影响的具有不变性的量，可以把它当作物质流形$\mathfrak{M}_3$的度量。

既然线素的变换(8.2.13)和(8.2.14)是线性的，而且微元的位置和方向均可以是任意的。则沿$dx^i$的一串相互交界面为平面的微元串释放后我们可以有意识地把它们按原有次序连接起来排列成串（见图8-2)，微元串的始点$X$和端点$X_1$的变换系数有差别

$$dB^I_i=B^I_i(X_1)-B^I_i(X),\tag{8.2.21}$$

从这种微元串的解放更看出不存在坐标系$X^I(x^i)$，因同一微元属于不同微元串时，解放后的位置和方向都可能不同。在($I$)的一点还有可能被多个微元所占据。(8.2.21)中的$dB^I_i$取决于路径

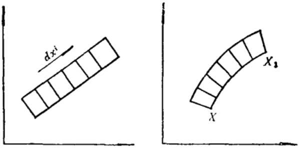



图 8-2

$dx^i$，因而$dB^I_i$不是全微分。但它却反映了沿$dx^i$的两邻近点的位错状况的差别。因此通过$B^I_i$和$dB^I_i$我们就能在度量空间 $M_3$ 中引进仿射连络$\Gamma^k_{ij}$。这个仿射连络$\Gamma^k_{ij}$也应像度量$g_{ij}$那样根据自然框架而被引入。

我们定义在物质流形的$dx^i$上两点$X$和$X+dX$的向量 $u^i(X)$ 和$u^i(X+dX)$为平行移动，如果它们和在沿$dx^i$ 的微元串的微元一起解放至 ($I$) 后有相等的分量（即跟微元一起解放至自然状态后按在欧氏空间$R_3$ 的意义是相等的，见图8-3)：

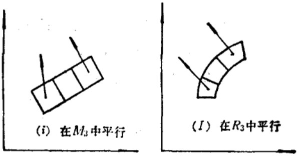



图 8-3

$$B^I_i u^i(X)=(B^I_i+dB^I_i)u^i(X+dX)=(B^I_i+dB^I_i)(u^i+du^i), \tag{8.2.22}$$

展开并略去高阶小量后我们有分量

$$B^I_i du^i+dB^I_i u^i=0, \tag{8.2.23}$$

即

$$du^i = -B_I^i dB_j^I u^j. \tag{8.2.24}$$

另一方面，在缺陷物质流形中，如果要引进仿射连络$\Gamma^i_{jk}$以建立平行移动的概念，由$\Gamma^i_{jk}$产生的平行移动法则应是

$$du^i = -\Gamma^i_{jk} u^j dx^k. \tag{8.2.25}$$

比较上两式，由$u^i$的任意性得到

$$\Gamma^i_{kj} dx^k = B_I^i dB_j^I, \tag{8.2.26}$$

这里 $dB_j^I$ 不是全微分，不能写成 $\partial_k B_j^I dx^k$，但是我们也可以证明，尽管 $B_j^I$ 与所选取的微元串有关，但是微元串在空间的位置和方向不会影响由(8.2.26)引进的$\Gamma^i_{kj}$的数值。事实上，类似于(8.2.20)，我们也有

$$B_{I'}^i dB_j^{I'} = O_{I'}^I O_J^{I'} B_I^i dB_j^J = \delta_J^I B_I^i dB_j^J = B_I^i dB_j^I, \tag{8.2.27}$$

因此，我们可以把(8.2.26)看作将要引进的仿射连络的定义式，它与自然微元串的方位无关。于是这个具有由(8.2.17)引进的度量和由(8.2.26)引进的仿射连络的缺陷物质流形是一个度量空间$M_3$。我们还可以证明在这个空间里，由(7.12.3)定义的 $Q$-张量必然为零。为此，将(8.2.17)定义的度量和由(8.2.26)定义的仿射连络代入度量张量的绝对微分式中：

$$\begin{aligned}
Dg_{jk} &= \nabla_i g_{jk} dx^i \\
&= dg_{jk} - (\Gamma^p_{ij} g_{pk} + \Gamma^p_{ik} g_{jp}) dx^i \\
&= \delta_{IJ}(dB_j^I B_k^J + B_j^I dB_k^J) - B_I^p dB_j^I \delta_{JK} B_p^J B_k^K \\
&\quad - B_I^p dB_k^I \delta_{JK} B_j^J B_p^K \\
&= \delta_{IJ} B_k^J dB_j^I + \delta_{IJ} B_j^I dB_k^J - \delta_{IK} B_k^K dB_j^I - \delta_{JI} B_j^J dB_k^I \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{8.2.28}$$

上式对任意的$dx^i$均成立，故必有

$$\nabla_i g_{jk} = -Q_{ijk} = 0, \tag{8.2.29}$$

因此，这个缺陷物质流形在引进度量和连络之后不仅是一个度量空间，而且还成为一个 Cartan 空间 $C_3$（参见§7.12）。这个空

间的两个特征量是挠率张量$S_{ij}{}^k$和 Riemann-Christoffel 曲率张量$R_{ijk}{}^l$：

$$S_{ij}{}^k=\Gamma_{[i\,j]}^{\,k}, \qquad (8.2.30)$$

$$R_{ijk}{}^l=2(\partial_{[i}\Gamma^{\,l}_{j]k}+\Gamma^{\,l}_{[i|m|}\cdot\Gamma^{\,m}_{j]k}), \qquad (8.2.31)$$

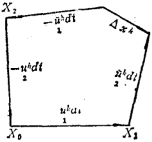


图 8-4

它们都是由仿射连络$\Gamma^{\,k}_{ij}$决定的。为了得到它们的几何意义以便和位错的概念相联系，我们改写§7.9中的图7-2 如图8-4：

设在$C_3$中有两个无穷小线素$\underset{1}{u}{}^k dt$和$\underset{2}{u}{}^k dt$。将$\underset{1}{u}{}^k dt$沿着$\underset{2}{u}{}^k dt$平移到$X_2$得$\underset{1}{\bar{u}}{}^k dt$，将$\underset{2}{u}{}^k dt$沿$\underset{1}{u}{}^k dt$平移到$X_1$得$\underset{2}{\bar{u}}{}^k dt$，并且记封口向量为$\Delta x^k$，它和图7-2的$db^k$方向相反，于是(7.9.14) 式可改写成

$$\Delta x^k=-S_{ij}{}^k df^{ij}, \qquad (8.2.32)$$

这里$df^{ij}$是(7.9.13)定义的双向量

$$df^{ij}=2\underset{1}{u}{}^{[i}\underset{2}{u}{}^{j]}dt^2. \qquad (8.2.33)$$

另外，从(7.10.11)式知，把向量$u^i$沿闭回路按仿射连络$\Gamma^{\,k}_{ij}$所定义的平行性移动到出发点，在$C_3$中有增量

$$\Delta u^k=-\frac{1}{2}R_{ijm}{}^k u^m df^{ij}. \qquad (8.2.34)$$

为了得到上述两式的物理意义，我们在实际空间中切出以上述的小闭回路为轴线的小截面积的圆环（一串截面积比回路小得多的微元串），然后在某一截面处切开使之释放至自然状态，因为截面积很小，这是可以做到的。

一般而言，这个处于自然状态的圆环就不封口了（缺口向量就是 $\Delta x^l$），而且两端微元的相对方位也不同了，原来在切口处的$u^i$变成为在两端的$u^l$和$u^l+\Delta u^l$，它们一般不再平行。回到$C_3$中它们有增量 $\Delta u^i$。这两个现象就分别由挠率张量和曲率张量所表

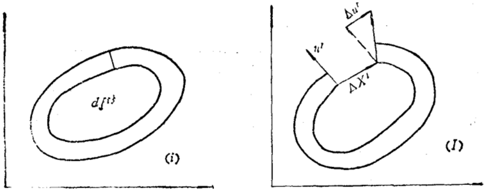



图 8-5

征．这个不封口向量正是对应于以这个小回路为 Burgers 回路的 Burgers 向量．按(3.3.16)式 Burgers 向量定义为

$$\mathbf{b}=-\int_{\Sigma}\boldsymbol{\alpha}d\boldsymbol{\Sigma}, \tag{8.2.35}$$

当回路很小时，上式可写为

$$db^k=-\alpha^{km}d\Sigma_m. \tag{8.2.36}$$

我们知道由$\underset{1}{\mathbf{v}}$和$\underset{2}{\mathbf{v}}$张成的面元的面积为

$$\Sigma=\underset{1}{v}\times\underset{2}{v}, \tag{8.2.37}$$

即

$$\Sigma_m=\underset{1}{v}^r\underset{2}{v}^s\epsilon_{mrs}=\epsilon_{mrs}\underset{1}{v}^{[r}\underset{2}{v}^{s]}. \tag{8.2.38}$$

因此，如果$d\Sigma_m$和$df^{rs}$互为对偶，由(1.3.9)

$$d\Sigma_m=-\frac{1}{2}\epsilon_{mrs}df^{rs}, \tag{8.2.39}$$

则

$$db^k=\frac{1}{2}\alpha^{km}\epsilon_{mij}df^{ij}. \tag{8.2.40}$$

与(8.2.32)比较，由$df^{ij}$的任意性并用(8.2.5)式我们最后得到

$$S_{ij}{}^k=\frac{1}{2}\alpha^{km}\epsilon_{mij}=\alpha_{ij}{}^k. \tag{8.2.41}$$

我们终于看到三阶位错密度张量 $\alpha_{ij}{}^{k}$ 正是对应于引进度量和仿射连络的 Cartan 空间 $C_3$ 的挠率张量。

应该注意方程 (8.2.31) 的意义还有待说明。如果采用 §8.1 的线性化的方法（丢掉(8.2.31)中的二次项）我们有

$$R_{ijk}{}^{l}=2\partial_{[i}\Gamma^{l}_{j]k}. \tag{8.2.42}$$

正如 Bilby 等人所指出的，在纯位错的情况，晶格应是到处都唯一定义的。这意味着流形必须是有远平行性或绝对平行性，以致晶格向量的平行移动是与路径无关的。由这一性质可假设 Riemann-Christoffel 张量 $R_{ijk}{}^{l}$ 为零：

$$R_{ijk}{}^{l}=0, \tag{8.2.43}$$

于是，用(8.2.30)和(8.2.41)式我们得到

$$0=R_{[ijk]}{}^{l}=2\partial_{[i}\Gamma^{l}_{jk]}=2\partial_{[i}\alpha_{jk]}{}^{l}, \tag{8.2.44}$$

这一关系式正相应于连续性方程(8.2.7)式。

总之，与位错理论相对应的 Cartan 空间是平坦的或者说有远平行性的 Cartan 空间。这个空间的挠率张量正是三阶的位错密度张量。由于Riemann-Christoffel曲率张量为零，由(8.2.34)知 $\Delta u^{k}=0$，即引进仿射连络之后，不管微元属于那一串，切开释放后切口向量u仍保持平行，空间是有远平行性的。如果 $\mathbf{R}\neq 0$，那么向量的平移将与路径有关，这是一般的 Cartan 空间，它可用来描述向错。

## §8.3 一般缺陷理论

本节我们将讨论更一般的缺陷理论与微分几何的对应关系。比起§3.3的一般缺陷理论，本节的一般性理论还包括了一个称之为**异物**（extra-matter）的缺陷。异物是由一个新的无应力的应变张量即所谓**拟塑性应变**张量（quasi-plastic strain）描述的。这导致拟位错密度张量和异物张量的概念。

首先，由总弯扭 $\Xi^T$和总应变$e^T$表示的总变形仍然是协调的，即它们仍满足(2.1.52)、(2.1.53)和(2.1.55)表示的第一、二、三协调条件：

$$\Xi^T\times\nabla=0, \tag{8.3.1}$$

$$\Xi^T=\nabla\times e^T, \tag{8.3.2}$$

$$\mathrm{tr}\,\Xi^T=0。 \tag{8.3.3}$$

因此，总位移$u^T$是存在的，它与$\Xi^T$和 $e^T$ 有关系：

$$e^T=\frac{1}{2}(u\otimes\nabla+\nabla\otimes u), \tag{8.3.4}$$

$$\Xi^T=\omega^T\otimes\nabla=\frac{1}{2}(\nabla\times u^T)\otimes\nabla,\left(\Xi^T_{kl}=\omega^T_{k,l}=\frac{1}{2}\epsilon_{kij}u^T_{[j,i]l}\right)。 \tag{8.3.5}$$

为了后面讨论的需要引进三阶的弯扭张量

$$\Xi^T_{mlk}=\partial_m W^T_{kl}=\partial_m\partial_{[l}u^T_{k]}, \tag{8.3.6}$$

这里$W^T=\frac{1}{2}(u^T\otimes\nabla-\nabla\otimes u^T)$是转动张量。$\Xi^T_{mlk}$是关于后面两指标$l,k$为反称的，它和二阶弯扭张量 $\Xi^T_{ij}$ 的关系是

$$\Xi^T_{mlk}=\epsilon_{ilk}\Xi^T_{im}, \tag{8.3.7}$$

$$\Xi^T_{ij}=\frac{1}{2}\epsilon_{ilk}\Xi^T_{jlk}。 \tag{8.3.8}$$

于是第一、二、三协调条件(8.3.1)～(8.3.3)改写成

$$\partial_{[n}\Xi^T_{m]lk}=0, \tag{8.3.9}$$

$$\partial_{[m}e^T_{l]k}+\Xi^T_{[ml]k}=0, \tag{8.3.10}$$

和

$$\Xi^T_{[mlk]}=0。 \tag{8.3.11}$$

注意到 $\Xi^T_{mlk}$关于后两个指标的反称性，(8.3.10) 式又可改写成

$$-2\partial_{[l}e^T_{k]m}+\Xi^T_{mlk}=0。 \tag{8.3.12}$$

从(8.3.9)和(8.3.12)消去$\Xi^T_{mlk}$得到

$$4(\partial_n\partial_l e^T_{km})_{[nm][lk]}=0, \tag{8.3.13}$$

式中，下标$[nm]$，$[lk]$表示分别对指标对$n$，$m$和指标对$l$，$k$取反称化。(8.3.13)和经典弹性的协调条件是一致的。

现在，如果体内存在包括位错、向错和异物的缺陷，即无应力的应变应包括塑性应变和拟塑性应变，因此

$$\Xi^T_{mlk}=\Xi_{mlk}+\Xi^P_{mlk}, \tag{8.3.14}$$

$$e^T_{lk}=e_{lk}+e^P_{lk}+e^Q_{lk}. \tag{8.3.15}$$

拟塑性应变张量 $e^Q_{lk}$ 的引入是为了描述由于异物，例如填隙的原子、空穴、磁致伸缩和热膨胀等等引起物体内晶阵间隙的改变。例如，如果在物体内温度的空间变化由$T(x^k)$ 给出，那么由此产生的拟塑性应变可定义为

$$e^Q_{lk}=\gamma(T-T_0)\delta_{lk}, \tag{8.3.16}$$

这里$\gamma$是物体的热膨胀系数，$T_0$是未变形前温度。在本理论中，塑性弯扭$\Xi^P_{mlk}$，塑性应变 $e^P_{lk}$ 和拟塑性应变 $e^Q_{lk}$ 是同时给定的，它们分别地不满足相应的协调条件 (8.3.9)～(8.3.11)。可以类似地定义**三阶位错密度张量**

$$\alpha_{mlk}\overset{\mathrm{df}}{=}\partial_{[m}e^P_{l]k}+\Xi^P_{[ml]k}, \tag{8.3.17}$$

它是关于头两个指标反称的。它刻划了塑性变形（应变和弯扭）对协调性的偏差。与二阶位错密度张量$\alpha_{ij}$的关系是

$$\alpha_{mlk}=-\frac{1}{2}\epsilon_{mlt}\alpha_{kt}, \tag{8.3.18}$$

$$\alpha_{ij}=-\epsilon_{jlk}\alpha_{lki}. \tag{8.3.19}$$

由(8.3.9)式可引进**四阶向错密度张量**

$$\Gamma_{nmlk}=2\partial_{[n}\Xi^P_{m]lk}, \tag{8.3.20}$$

它分别关于前面一对指标$n$，$m$ 和最后一对指标 $l$，$k$ 为反称，与(3.3.1)式定义的二阶向错密度张量

$$\theta_{ij}=-\epsilon_{jlk}\partial_k\Xi^P_{il} \tag{8.3.21}$$

互为对偶：

$$\Gamma_{nmlk}=\epsilon_{inm}\epsilon_{jlk}\theta_{ji},\tag{8.3.22}$$

$$\theta_{ji}=\frac{1}{4}\epsilon_{inm}\epsilon_{jlk}\Gamma_{nmlk}.\tag{8.3.23}$$

同样可引进**三阶的拟位错密度张量**来描述拟塑性变形对协调性的偏离，它定义为

$$\alpha^{Q}_{mlk}\overset{\mathrm{df}}{=}\partial_{[m}e^{Q}_{l]k}.\tag{8.3.24}$$

以上引进的位错密度张量$\alpha_{mlk}$，拟位错密度张量$\alpha^{Q}_{mlk}$和向错密度张量$\Gamma_{nmlk}$是描述包括异物在内的一般缺陷的最基本的量。为了方便，有时还引进**三阶的Nye 张量**，它定义为

$$K_{mlk}\overset{\mathrm{df}}{=}-2\partial_{[l}e^{P}_{k]m}+\Xi^{P}_{mlk},\tag{8.3.25}$$

它是关于后两个指标反对称的。和(8.3.12)式比较显示它也是反映了塑性变形（塑性应变和塑性弯扭）对协调性的偏离。从定义式(8.3.17)、(8.3.25)以及$e^{P}_{lk}$的对称性和$\Xi^{P}_{mlk}$的反对称性可找到位错密度张量和 Nye 张量的关系：

$$K_{mlk}=\alpha_{mlk}-\alpha_{lkm}+\alpha_{kml},\tag{8.3.26}$$

$$\alpha_{mlk}=K_{[ml]k}\tag{8.3.27}$$

以及位错密度张量、Nye 张量和塑性弯扭间的关系：

$$\alpha_{[mlk]}=K_{[mlk]}=\Xi^{P}_{[mlk]}.\tag{8.3.28}$$

代替拟位错密度张量，也可以引进**异物张量**

$$B_{nmlk}=4(\partial_n\partial_l e^{Q}_{km})_{[nm][lk]},\tag{8.3.29}$$

它与拟位错密度张量$\alpha^{Q}_{lkm}$有关系

$$B_{nmlk}=4(\partial_n\alpha^{Q}_{lkm})_{[nm]}.\tag{8.3.30}$$

从上述各种缺陷度量的定义直接可得到它们各自应满足的连续性方程：

$$\partial_{[i}\Gamma_{nm]lk}=0,\tag{8.3.31}$$

$$\Gamma_{[nml]k}-2\partial_{[n}\alpha_{ml]k}=0,\tag{8.3.32}$$

$$\Gamma_{[nml]k}-2\partial_{[n}K_{ml]k}=0,\tag{8.3.33}$$

$$\partial_{[n}\alpha^{Q}_{ml]k}=0,\tag{8.3.34}$$

$$\alpha^{Q}_{[mlk]}=0,\tag{8.3.35}$$

$$\partial_{[l}B_{nm]lk}=0,\tag{8.3.36}$$

和

$$B_{[nml]k}=0.\tag{8.3.37}$$

这些方程的意义如下：方程(8.3.31)表明向错是无源的，它不能始于或终于体内。方程(8.3.32)和(8.3.33)是等价的，它们都说明位错是有源的，它可始于或终于向错。方程(8.3.34)和(8.3.36)表明拟位错密度张量和异物张量也都是无源的。方程(8.3.35)和(8.3.37)分别反映了由对称的拟塑性应变张量定义的拟位错密度张量和异物张量的对称性。

同样可得到各种缺陷度量的基本几何法则：

$$2\partial_{[n}\Xi_{m]lk}=-\Gamma_{nmlk},\tag{8.3.38}$$

$$\partial_{[m}e_{l]k}+\Xi_{[ml]k}=-\alpha_{mlk}-\alpha^{Q}_{mlk},\tag{8.3.39}$$

$$2\partial_{[l}e_{k]m}-\Xi_{mlk}=K_{mlk}-2\alpha^{Q}_{lkm},\tag{8.3.40}$$

它们分别与第三章中的基本几何法则(3.3.11)、(3.2.23)和(3.2.24)相对应，只是位错密度增加了由拟塑性应变贡献的拟位错密度一项，它和真位错密度起的作用是一样的。上面三个方程说明了缺陷密度（即向错、位错和拟位错密度）引起了非协调的弹性变形场（弹性应变和弹性弯扭）。

我们还可以类似地定义非协调度张量 **G**，只是这时非弹性应变应包括塑性应变和拟塑性应变两部分：

$$G_{nmlk}=-4\partial_{[n}e^{P}_{m][l,k]}-4\partial_{[n}e^{Q}_{m][l,k]}.\tag{8.3.41}$$

将(8.3.41)与各种缺陷密度的定义式(8.3.17)、(8.3.20)、(8.3.25)和(8.3.29)相比较得

$$\begin{aligned}G_{nmlk}&=\Gamma_{nmlk}-2\partial_{[n}K_{m]lk}+B_{nmlk}\\&=\{\Gamma_{nmlk}+4(\partial_{n}\alpha_{lkm})_{[nm]}\}^{S}+B_{nmlk},\end{aligned}\tag{8.3.42}$$

式中上标$S$表示关于指标对$(n,m)$和$(l,k)$的对称化。(8.3.42)表

明了在最一般的缺陷存在的情形，向错、位错和异物对非协调度的贡献。

经过上面对描述一般缺陷的三阶和四阶的各种基本量的讨论之后，我们可以按§8.1和§8.2的思路转入讨论一般缺陷理论和微分几何的对应了。

我们可以类似于 §8.2 那样在处于自然状态的微元集合中引进度量$g_{ij}$和仿射连络$\Gamma^i_{jk}$使之成为一个度量空间$M_3$。当然，我们不再要求它具有绝对平行性，得到的是一般的度量空间，故度量张量的协变导数一般不为零：

$$Q_{mlk}=-\nabla_m g_{lk}=-\partial_m g_{lk}+\Gamma_{mlk}+\Gamma_{mkl}. \qquad (8.3.43)$$

改写上式得到

$$\Gamma_{mlk}=\frac{1}{2}\partial_m g_{lk}+\Gamma_{m[lk]}+\frac{1}{2}Q_{mlk}. \qquad (8.3.44)$$

为简单起见，记

$$\Xi_{mlk}\equiv-\Gamma_{m[lk]}. \qquad (8.3.45)$$

注意到度量张量与弹性应变张量之间的关系式(8.1.10)仍成立，于是上式改写成

$$\Gamma_{mlk}=-\partial_m e_{lk}-\Xi_{mlk}+\frac{1}{2}Q_{mlk}. \qquad (8.3.46)$$

在非黎曼几何中，仿射连络$\Gamma_{mlk}$的挠率是由下式定义的：

$$S_{mlk}\equiv\Gamma_{[ml]k}. \qquad (8.3.47)$$

于是(8.3.46)变为

$$S_{mlk}=-\partial_{[m}e_{l]k}-\Xi_{[ml]k}+\frac{1}{2}Q_{[ml]k}. \qquad (8.3.48)$$

比较上式和(8.3.39)式我们发现：如果

（1） $\Xi_{mlk}$ 就是弹性弯扭，

（2） $S_{mlk}=\alpha_{mlk}$, $\qquad (8.3.49)$

（3） $\alpha^Q_{mlk}=-\frac{1}{2}Q_{[ml]k}$, $\qquad (8.3.50)$

那么，这两个式子是完全对应的。从拟塑性位错密度的定义式(8.3.24)我们看到，如果我们根据拟塑性应变张量来定义 $Q$-张量

$$Q_{mlk} \equiv -2\partial_m e^{Q}_{lk}, \tag{8.3.51}$$

那么条件(8.3.50)将满足。(8.3.51)还保留了 $Q$-张量关于后两个指标的对称性。条件(1)、(2)可看成§8.2的纯位错情况的自然推广，而条件(3)可以这样解释：与自然状态相联系的度量张量 $g_{lk}$ 现在经受塑性和拟塑性变形。如同在§8.2讨论的，塑性变形不改变晶格的方位和间隔，所以如同(8.2.29)式表明的那样它对 $Q$-张量没有贡献。然而，拟塑性变形是改变晶格的间隔和方位的，因此这时度量张量的协变导数不再为零，$Q$-张量正是描述了拟塑性应变的影响。当然，这时的 $Q$-张量已不能是完全任意的，它必须满足条件

$$\partial_{[n}Q_{m]lk} = -2\partial_{[n}\partial_{m]}e^{Q}_{lk} = 0. \tag{8.3.52}$$

至于异物张量 $B_{nmlk}$，由(8.3.29)和(8.3.50)得到

$$B_{nmlk} = -2(\partial_n Q_{lkm})_{[nm][lk]}, \tag{8.3.53}$$

它也可以用 $Q$-张量来表示。将(8.3.49)式代入 Nye 张量的表达式(8.3.26)和(8.3.27)式有

$$K_{mlk} = S_{mlk} - S_{lkm} + S_{kml}, \tag{8.3.54}$$

$$S_{mlk} = K_{[ml]k}. \tag{8.3.55}$$

代(8.3.48)和(8.3.50)式到(8.3.54)式中并利用应变张量 $e_{lk}$ 的对称性、弹性弯扭 $\Xi_{mlk}$ 的反称性和拟塑性位错密度 $\alpha^{Q}_{mlk}$ 的对称性我们得到

$$K_{mlk} = 2\partial_{[l}e_{k]m} - \Xi_{mlk} + 2\alpha^{Q}_{lkm}, \tag{8.3.56}$$

利用基本几何关系(8.3.40)，上式又可改写成

$$\Gamma_{mlk} = -(\partial_m e_{lk} + \partial_l e_{mk} - \partial_k e_{ml}) + K_{mlk} - (\partial_m e^{Q}_{lk} + \partial_l e^{Q}_{mk} - \partial_k e^{Q}_{ml}). \tag{8.3.57}$$

下面我们讨论连络 $\Gamma_{mlk}$ 的 Riemann-Christoffel 曲率张量

究竟应与哪个量相对应？将曲率张量线性化（丢掉二次项）得到

$$R_{nmlk}=2\partial_{[n}\Gamma_{m]lk}, \tag{8.3.58}$$

它是关于前面两个指标反对称的。将(8.3.46)代入上式右边，注意到$\partial_{[n}\partial_{m]}e_{lk}=0$和(8.3.52)式得到

$$R_{nmlk}=-2\partial_{[n}\Xi_{m]lk}. \tag{8.3.59}$$

比较(8.3.59)和(8.3.38)式我们有

$$R_{nmlk}=\Gamma_{nmlk}. \tag{8.3.60}$$

至此，我们终于发现，一般缺陷理论的向错密度 $\Gamma_{nmlk}$、位错密度$\alpha_{mlk}$和拟位错密度$\alpha^{Q}_{mlk}$ 正是分别对应于一般度量空间的曲率张量、挠率张量和 $Q$-张 量（当然，后一个对应不是直接相等，而是通过(8.3.50)式建立起来的)。

我们还可以讨论一下由(8.3.41)表示的非协调度张量$G_{nmlk}$。由(7.12.13)式知

$$\begin{aligned}\Gamma_{mlk}&=g_{\{mkl\}}-S_{\{mkl\}}+\frac{1}{2}Q_{\{mkl\}}\\&=[mlk]+K_{mlk}+\frac{1}{2}(Q_{mkl}+Q_{lmk}-Q_{klm}),\end{aligned} \tag{8.3.61}$$

这里

$$[mlk]=g_{\{mkl\}}=\frac{1}{2}(\partial_m g_{lk}+\partial_l g_{km}-\partial_k g_{ml}) \tag{8.3.62}$$

是第二类 Christoffel 符号，

$$K_{mlk}=-S_{\{mkl\}}=-S_{mkl}-S_{lmk}+S_{klm}. \tag{8.3.63}$$

我们把$\Gamma_{mlk}$分成两部分：

$$\Gamma_{mlk}=[mlk]+T_{mlk}, \tag{8.3.64}$$

其中

$$T_{mlk}=K_{mlk}+\frac{1}{2}(Q_{mkl}+Q_{lmk}-Q_{klm}) \tag{8.3.65}$$

表示连络$\Gamma_{mlk}$和由度量$g_{lk}$产生的 Riemann 连络(参见§7.11)

之差。Riemann 连络的曲率张量是

$$\bar{R}_{nmlk}=2(\partial_n[mlk])_{[nm]}. \tag{8.3.66}$$

由于(8.3.62)式和度量$g_{lk}$的对称性，亦有

$$\bar{R}_{nmlk}=2(\partial_n\partial_l g_{km})_{[nm][lk]}. \tag{8.3.67}$$

与(8.3.41)定义的非协调度比较，注意到(8.1.10)式我们有

$$G_{nmlk}=\bar{R}_{nmlk}, \tag{8.3.68}$$

即非协调度张量$G_{nmlk}$正是由度量$g_{ij}$产生的 Riemann 连络的曲率张量。

在线性化的情况下，

$$R_{nmlk}=2\partial_{[n}\Gamma_{m]lk}, \tag{8.3.69}$$

将(8.3.64)式代入上式右边并利用(8.3.66)和(8.3.68)我们得到：

$$R_{nmlk}=G_{nmlk}+2\partial_{[n}T_{m]lk}. \tag{8.3.70}$$

从(8.3.65)、(8.3.51)、(8.3.53)和$Q_{mlk}$的对称性上式可写成

$$R_{nmlk}=G_{nmlk}+2\partial_{[n}K_{m]lk}-B_{nmlk}, \tag{8.3.71}$$

该式与(8.3.42)是一致的。由曲率张量满足的 Bianchi 恒等式

$$\partial_{[w}R_{nm]lk}=0 \tag{8.3.72}$$

和(8.3.70)式我们又得到

$$\partial_{[w}G_{nm]lk}=0. \tag{8.3.73}$$

上式正是非协调度张量满足的连续性方程。

在本章，我们已建立了从内应力理论到一般缺陷理论与相应的微分几何抽象空间的对应关系。这样，原来的非协调性的矛盾就转化为选取具有适当性质的空间的矛盾。为了减轻数学上的复杂化和使对应关系更清晰，我们采用了线性化的办法，并采用三阶或四阶的张量去描述各种缺陷。当然，用对偶关系我们可以降低这些张量的阶数，得到在第三章介绍的各种二阶缺陷密度张量与微分几何抽象空间中的基本量之间的关系。在建立这种对应关系的时候，各家采用的手法有所不同，对出现在理论中的各量的

解释也稍有差异。但是，这些对应关系的建立为处理非协调问题提供了漂亮的几何-拓扑描述，是抽象的微分几何在力学问题上应用的成功范例。

# 第九章　流形论初步

为了介绍非协调理论的理性理论，我们需要介绍一些流形论的最基本概念，因为变形体非协调理论的理性理论的整个讨论是在微分流形上展开的。当然，限于篇幅，我们只介绍后面讨论将涉及的微分流形、切空间和余切空间、切向量场和 Frobenius 定理、纤维丛、连络等概念。至于流形论的进一步内容，请参阅有关专著，例如文献[ 2 ]、[40]。

## §9.1　微分流形

设 $M$ 是一个非空集合，$\tau$ 是 $M$ 的一个子集族，并且满足下述条件：

（1）　$M\in\tau$；

（2）　空集 $\phi\in\tau$；

（3）　$\tau$ 中任意两个集的交集属于 $\tau$；

（4）　$\tau$ 中任意多个集的和集属于 $\tau$；

我们说 $\tau$ 定义了集 $M$ 上的一个**拓扑**，并说 $\tau$ 中这些集是 $M$ 上所定义的拓扑的开集。集 $M$ 和它的拓扑而成的序对 $(M,\tau)$ 称为一个**拓扑空间**。

给定一个拓扑空间 $(M,\tau)$，若点 $a\in M$，设 $O$ 是包含 $a$ 的一个开集，并有一个子集 $N\subset M$ 包含 $O$，则称 $N$ 为 $a$ 的一个邻域。$a$ 叫 $N$ 的内点。若 $b$ 属于 $N$ 的补集 $C(N)$，则称 $b$ 为 $N$ 的外点。

对于集 $M$ 的每对不同点 $a$ 和 $b$，若分别有 $a$ 和 $b$ 的邻域 $N$ 和 $L$ 使得 $N\cap L=\phi$，则称拓扑空间$(M,\tau)$为分离空间或 Hausdorff（拓扑）空间。

设 $X=(M,\tau)$ 和 $Y=(M',\tau')$ 是两个拓扑空间。如果对于 $X$ 的每点 $p$，在 $Y$ 中有一点 $p'$ 与 $p$ 对应，则称这个对应为 $X$ 到 $Y$ 的映射，记作

$$f:\ X\to Y,\quad p'=f(p). \tag{9.1.1}$$

$p'$ 称为 $p$ 的像。当 $Y$ 的一切点都是 $X$ 的点的像时，称 $f$ 是从 $X$ 到 $Y$ 的满映射。当给定 $p'\in Y$ 时，在 $X$ 中以 $p'$ 为像的一切点全体称为 $p'$ 的原像。使 $p'$ 和它在 $X$ 中的原像相对应的映射称为给定映射 $f$ 的逆映射，记作 $f^{-1}$。

设 $f:X\to Y$ 是一个从 $X$ 到 $Y$ 的映射，如果对给定的点 $p\in X$ 和它在 $Y$ 中的像 $p'=f(p)$ 的任意邻域 $U'(p')$，总可以找到 $p$ 的一个邻域 $U(p)$ 使得

$$f(U(p))\subset U'(p'), \tag{9.1.2}$$

则称映射 $f$ 在 $p$ 点是连续的。特别地，如果 $f$ 在 $X$ 的每一点处都连续，则称 $f$ 在 $X$ 中连续。这时 $f:X\to Y$ 叫做一个连续映射，或简称映射。$X$ 和 $Y$ 分别叫做 $f$ 的定义空间和值空间。

如果 $f:X\to Y$ 是 $X$ 到 $Y$ 的连续的满映射，而且逆映射 $f^{-1}$: $Y\to X$ 也是连续的，则 $f$ 叫做拓扑映射或同胚。这时称拓扑空间 $X$ 和 $Y$ 是同胚的。

在连续映射 $f:X\to Y$ 之下，如果在 $p$ 点有一个邻域 $U(p)$ 使它与它的像 $U'=f(U)$ 同胚，就说映射 $f$ 在 $p$ 点是局部同胚的。显然，同胚在任意点是局部同胚的。但是，在每一点局部同胚的映射可以不是同胚。关于拓扑学的其它基本概念和内容，请看文献[ 4 ]。

由 $n$ 个有序实数构成的数组 $x=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 的全体组成的集合称为 $n$ 维数空间，记作 $R^n$。它的元素称为点，实数 $x^i$ 称为

点 $x\in R^n$ 的第 $i$ 个坐标。对任意的 $x$、$y\in R^n$，$a\subset R$，令

$$(x+y)^i=x^i+y^i, \tag{9.1.3}$$

$$(ax)^i=ax^i, \tag{9.1.4}$$

这样，就在 $R^n$ 中定义了线性运算（加法和对实数的乘法），使 $R^n$ 成为实数域 $R$ 上的 $n$ 维向量空间。空间 $R^n$ 除了上述线性构造外，还有典型的拓扑构造。对 $x$、$y\in R^n$，令

$$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{9.1.5}$$

易证它满足下面的三个条件：

（1） $d(x,y)\geqslant 0$，且等号只在 $x=y$ 时成立；

（2） $d(x,y)=d(y,x)$；

（3） 对任意 $x,y,z\in R^n$，有不等式

$$d(x,y)+d(y,z)\geqslant d(x,z).$$

可引进 $d(x,y)$ 作为 $R^n$ 中的距离函数而使 $R^n$ 成为度量空间。作为度量空间，$R^n$ 有自然的拓扑结构：以开球 $B_{x;r}=\{y\in R^n|d(x,y)<r\}$ $(x\in R^n, r>0)$ 的并集为开集，这时 $R^n$ 称为 $n$ 维欧氏空间。

$R^n$ 有很好的拓扑性质和代数性质，但在许多场合，我们的研究对象没有这样完好的性质。这样，就要将欧氏空间加以推广，引进流形的概念。

设 $M$ 是 Hausdorff 空间，若对任意一点 $x\in M$，都有 $x$ 在 $M$ 中的一个邻域 $U$ 同胚于 $n$ 维欧氏空间 $R^n$ 的一个开集，则称 $M$ 是一个 $n$ 维流形（或拓扑流形）。

粗略地讲，流形在每一点的近傍都有一个类似于欧氏空间的结构，可以引进局部坐标系，流形正是一块块“欧氏空间”粘起来的结果。

流形 $M$ 的邻域 $U$ 可经同胚 $\phi_U$ 映射到欧氏空间 $R^n$ 的一个开

集 $\phi_U(U)$，称$(U,\phi_U)$是 $M$ 的一个**坐标卡**。因为 $\phi_U$ 是同胚，对任意一点 $y\in U$，可以把 $\phi_U(y)\in R^n$ 的坐标定义为 $y$ 的坐标，即令

$$u^i=(\phi_U(y))^i,\quad y\in U,\ i=1,2,\cdots,n \tag{9.1.6}$$

称 $u^i(1\leqslant i\leqslant n)$ 为点 $y\in U$ 在坐标卡$(U,\phi_U)$的**局部坐标**。

设$(U,\phi_U)$和$(V,\phi_V)$是流形 $M$ 的两个坐标卡，若 $U\cap V\neq\phi$，则 $\phi_U(U\cap V)$和 $\phi_V(U\cap V)$是 $R^n$ 中两个非空开集，并且映射

$$\phi_V\circ\phi_U^{-1}\Big|_{\phi_U(U\cap V)}:\phi_U(U\cap V)\to\phi_V(U\cap V) \tag{9.1.7}$$

建立了这两个开集之间的同胚，其逆映射是 $\phi_U\circ\phi_V^{-1}\Big|_{\phi_V(U\cap V)}$。

它们都是欧氏空间的一个开集到另一个开集的映射。如果用坐标表示，则$\phi_V\circ\phi_U^{-1}$和$\phi_U\circ\phi_V^{-1}$ 分别表示为欧氏空间的 $n$ 个实函数

$$y^i=f^i(x^1,\cdots,x^n)=(\phi_V\circ\phi_U^{-1}(x^1,\cdots,x^n))^i,\quad (x^1,\cdots,x^n)\in\phi_U(U\cap V), \tag{9.1.8}$$

$$x^i=g^i(y^1,\cdots,y^n)=(\phi_U\circ\phi_V^{-1}(y^1,\cdots,y^n))^i,\quad (y^1,\cdots,y^n)\in\phi_V(U\cap V), \tag{9.1.9}$$

称为**坐标变换函数**。因为 $\phi_V\circ\phi_U^{-1}$ 和 $\phi_U\circ\phi_V^{-1}$ 是互逆的同胚映射，所以 $f^i$、$g^i$ 都是连续的，且

$$\begin{cases}f^i(g^1(y^1,\cdots,y^n),\cdots,g^n(y^1,\cdots,y^n))=y^i,\\ g^i(f^1(x^1,\cdots,x^n),\cdots,f^n(x^1,\cdots,x^n))=x^i.\end{cases} \tag{9.1.10}$$

我们称两个坐标卡 $(U,\phi_U)$ 和 $(V,\phi_V)$ 是 $C^r$-**相容的**，如果 $U\cap V=\phi$ 或者在 $U\cap V\neq\phi$ 时，坐标变换函数 $f^i(x^1,\cdots,x^n)$ 和 $g^i(y^1,\cdots,y^n)$都是 $C^r$ 的。

设 $M$ 是一个 $m$ 维流形，如果在 $M$ 上给定一个坐标卡集合 $\mathscr{A}=\{(U,\phi_U),(V,\phi_V),(W,\phi_W),\cdots\}$ 满足下列条件，则称 $\mathscr{A}$ 是 $M$ 的一个 $C^r$ **微分结构**：

（1） $\{U,V,W,\cdots\}$ 是 $M$ 的一个开覆盖，

（2） 属于 $\mathscr{A}$ 的任意两个坐标卡是 $C^r$-相容的，

（3） $\mathscr{A}$是极大的，即：对于$M$的任意一个坐标卡$(\bar{U},\phi_{\bar{U}})$，如果它与属于$\mathscr{A}$的每一个坐标卡都是$C^r$-相容的，则它自身必属于$\mathscr{A}$。

给定了一个 $C^r$ 微分结构的流形 $M$ 称为一个 $C^r$-**微分流形**。属于给定的微分结构的坐标卡称为微分流形 $M$ 的容许坐标卡。微分结构$\mathscr{A}$有时也称为 $M$ 的**坐标图集**。如果给定的微分结构是 $C^\infty$ 的，则称 $M$ 是**光滑流形**。在不致引起混淆时，常把光滑流形简称为流形。

例如：取 $R^2$ 中单位圆

$$s:(x^1)^2+(x^2)^2=1 \tag{9.1.11}$$

为例，如果取下面四个坐标卡（参见图 9-1）

$$\begin{cases} U_1=\{x\in s,|x^2>0\}, & \phi_{U_1}(x)=x^1, \\ U_2=\{x\in s,|x^2<0\}, & \phi_{U_2}(x)=x^1, \\ V_1=\{x\in s,|x^1>0\}, & \phi_{V_1}(x)=x^2, \\ V_2=\{x\in s,|x^1<0\}, & \phi_{V_2}(x)=x^2. \end{cases} \tag{9.1.12}$$

很显然，$\{U_1,U_2,V_1,V_2\}$构成$s$的一个开覆盖，在交集$U_1\cap V_1$上有

$$\begin{cases} x^2=\sqrt{1-(x^1)^2}, \\ x^1=-\sqrt{1-(x^2)^2}, \end{cases} \quad (x^1<0,\ x^2>0), \tag{9.1.13}$$

它们都是$C^\infty$-函数。所以$(U_1,\phi_{U_1})$和$(V_2,\phi_{V_2})$是$C^\infty$-相容的。同理可证，其余任意两个坐标卡也都是$C^\infty$-相容的。因此，上面给出的坐标卡使$s$成为一维的光滑流形。

设$f:M\to N$是从光滑流形$M$到另一个光滑流形$N$的一个连续映射，$\dim M=\dim N=n$。若在一点$p\in M$，存在点$p$的容许坐标卡$(U,\phi_U)$和点$f(p)$的容许坐标卡$(V,\psi_V)$使得映射

$$\psi_V \circ f \circ \phi_U^{-1}: \phi_U(U) \longrightarrow \psi_V(V) \tag{9.1.14}$$

在点 $\phi_U(p)$ 是 $C^\infty$ 的，则称映射 $f$ 在点 $p$ 是 $C^\infty$ 的。若映射 $f$ 在 $M$ 的每一点 $p$ 都是 $C^\infty$ 的，则称 $f$ 是从 $M$ 到 $N$ 的**光滑映射**。

如果 $\dim M=\dim N$，且 $f:M\to N$ 是同胚，当 $f$ 和 $f^{-1}$ 都是光滑映射，则我们称 $f:M\to N$ 是可微同胚。如果光滑流形 $M$ 和 $N$ 是可微同胚的，则称 $M$ 和 $N$ 的光滑流形结构是同构的。

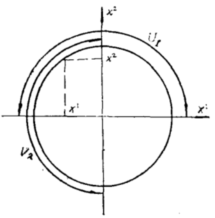


图 9-1

取 $R^1$ 中一个开区间 $L=(a, b)$，则从 $L$ 到流形 $N$ 的光滑映射 $f:(a,b)\to N$ 称为流形 $N$ 上的一条参数曲线。而从流形 $N$ 到 $R^1$ 的光滑映射 $f:N\to R^1$ 称为 $N$ 上的**光滑函数**。

假定 $M$、$N$ 分别是 $m$ 维和 $n$ 维光滑流形，它们的微分结构分别是 $\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\phi_\alpha),\alpha\in I\}$ 和 $\mathscr{B}=\{(V_\beta,\psi_\beta),\beta\in J\}$。我们可以用下面的办法构造一个新的 $m+n$ 维光滑流形 $M\times N$：首先，$\{U_\alpha \times V_\beta,\alpha\in I,\beta\in J\}$ 构成拓扑积空间 $M\times N$ 的开覆盖；其次，定义映射 $\phi_\alpha\times\psi_\beta:U_\alpha\times V_\beta\to R^{m+n}$ 使

$$\phi_\alpha\times\psi_\beta(p,q)=(\phi_\alpha(p),\psi_\beta(q)),\quad (p,q)\in U_\alpha\times V_\beta, \tag{9.1.15}$$

这样，$(U_\alpha\times V_\beta,\phi_\alpha\times\psi_\beta)$ 是 $M\times N$ 的一个坐标卡，易证这样得到的坐标卡都是 $C^\infty$-相容的，因此它们决定了 $M\times N$ 上的光滑流形结构。这样得到的 $m+n$ 维光滑流形 $M\times N$ 称为 $M$ 和 $N$ 的**积流形**。

## §9.2 切空间和余切空间

经典的曲线和曲面在每一点分别有切线和切平面的概念。同

样，在拓扑流形上给定了一个微分结构之后，在每一点的附近可以用线性空间来“近似”．更确切地说，可以引进切空间和余切空间的概念．我们首先从余切空间入手．

设 $M$ 是 $m$ 维光滑流形．固定一点 $p\in M$，设 $f$ 是定义在点 $p$ 的一个邻域上的 $C^\infty$-函数，所有这样的函数的集合记作 $C_p^\infty$．自然，属于 $C_p^\infty$ 的两个函数的定义域可以是不同的．但是函数空间 $C_p^\infty$ 中的加法和乘法仍然是有意义的：设 $f$、$g\in C_p^\infty$，它们的定义域分别是 $U$ 和 $V$，那么 $U\cap V$ 仍是包含 $p$ 的开邻域．这样，$f+g$ 和 $f\cdot g$ 可以看作定义在 $U\cap V$ 上的 $C_p^\infty$ 函数，即

$$f+g,\ f\cdot g\in C_p^\infty.$$

在 $C_p^\infty$ 上定义如下关系 $\backsim$：设 $f$、$g\in C_p^\infty$，则 $f\backsim g$，当且仅当存在 $p$ 的一个开邻域 $H$ 使得 $f|_H=g|_H$．显然，$\backsim$ 是 $C_p^\infty$ 中的等价关系．用 $[f]$ 记 $f$ 在 $C_p^\infty$ 中的 $\backsim$ 等价类，称为流形 $M$ 在点 $p$ 的 **$C^\infty$-函数芽**．令

$$\mathscr{F}_p=C_p^\infty/\backsim\overset{\mathrm{df}}{=}\{[f]\,|\,f\in C_p^\infty\},\tag{9.2.1}$$

则在 $\mathscr{F}_p$ 中可定义加法和对实数的乘法使之成为实数域上的线性空间．实际上，若 $[f],[g]\in\mathscr{F}_p$，$\alpha\in R$，只要令

$$[f]+[g]=[f+g],\tag{9.2.2}$$

$$\alpha[f]=[\alpha f].\tag{9.2.3}$$

根据定义，上面两式的右端与代表 $f$、$g$ 的选取无关．可证 $\mathscr{F}_p$ 是无穷维的实线性空间．

设 $\gamma$ 是 $M$ 上过 $p$ 点的一段参数曲线，即有正数 $\delta$，使 $\gamma$：$(-\delta,\delta)\to M$ 是 $C^\infty$-映射，且 $\gamma(0)=p$．所有这些参数曲线的集合记作 $\Gamma_p$．对于 $\gamma\in\Gamma_p$，$[f]\in\mathscr{F}_p$，定义配合

$$\langle\!\langle\gamma,[f]\rangle\!\rangle\overset{\mathrm{df}}{=}\left.\frac{d(f\circ\gamma)}{dt}\right|_{t=0},\quad -\delta<t<\delta.\tag{9.2.4}$$

显然，对于固定的 $\gamma$，上式右端的数值完全由 $[f]$ 确定，而不依赖于代表 $f$ 的选取．而且配合 $\langle\!\langle\gamma,[f]\rangle\!\rangle$ 关于第二个因子 $[f]$ 是线

性的，即对任意的$\gamma\in\Gamma_p$,$[f]$、$[g]\in\mathscr{T}_p$和$\alpha\in R$，有：

$$\langle\langle\gamma,[f]+[g]\rangle\rangle=\langle\langle\gamma,[f]\rangle\rangle+\langle\langle\gamma,[g]\rangle\rangle, \tag{9.2.5}$$

$$\langle\langle\gamma,\alpha[f]\rangle\rangle=\alpha\langle\langle\gamma,[f]\rangle\rangle. \tag{9.2.6}$$

设

$$\mathscr{H}_p=\{[f]\in\mathscr{T}_p \mid \langle\langle\gamma,[f]\rangle\rangle=0,\forall\gamma\in\Gamma_p\}, \tag{9.2.7}$$

则$\mathscr{H}_p$是$\mathscr{T}_p$的线性子空间。如果对$f\in\mathscr{T}_p$和包含$p$的容许坐标卡$(U,\phi_U)$，令

$$F(x^1,\cdots,x^n)=f\circ\phi_U^{-1}(x^1,\cdots,x^n), \tag{9.2.8}$$

那么可证：$[f]\in\mathscr{H}_p$，当且仅当$\partial F/\partial x^i|_{\phi_U(p)}=0(i=1,\cdots,n)$。事实上，设$\gamma\in\Gamma_p$，其坐标表示是

$$(\phi_U\circ\gamma(t))^i=x^i(t),\quad -\delta<t<\delta, \tag{9.2.9}$$

则

$$\begin{aligned}\langle\langle\gamma,[f]\rangle\rangle&=\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)\Big|_{t=0}\\&=\frac{d}{dt}F(x^1(t),\cdots,x^n(t))\Big|_{t=0}\\&=\frac{\partial F}{\partial x^i}\Big|_{\phi_U(p)}\cdot\frac{dx^i(t)}{dt}\Big|_{t=0},\end{aligned} \tag{9.2.10}$$

在最后一个等式中已继续采用求和约定。由于$\gamma$的任意性，我们可选取$\gamma$使$dx^i(t)/dt|_{t=0}$取任意实数值。因此要对任意的$\gamma\in\Gamma_p$都有$\langle\langle\gamma,[f]\rangle\rangle=0$，必须且只须

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}\Big|_{\phi_U(p)}=0,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{9.2.11}$$

而且易见这种性质是不依赖于容许坐标卡的选取的。因此，子空间$\mathscr{H}_p$恰好是在点$p$关于局部坐标的偏导数都是零的光滑函数芽所构成的线性空间。商空间$\mathscr{T}_p/\mathscr{H}_p$称为流形$M$在点$p$的**余切空间**，记作$T_p^*$。函数芽$[f]\in\mathscr{T}_p$的$\mathscr{H}$-等价类记作$[\tilde{f}]$或$(df)_p$，称为流形$M$在$p$点的**余切向量**。易见$T_p^*$是线性空间，它有从

线性空间 $\mathscr{T}_p$ 诱导的线性结构，即对于$[f],[g]\in\mathscr{T}_p$, $\alpha\in R$ 有

$$[\tilde{f}]+[\tilde{g}]=[\widetilde{f+g}], \tag{9.2.12}$$

$$\alpha[\tilde{f}]=\widetilde{\alpha[f]}. \tag{9.2.13}$$

可以证明，$T_p^*$ 是 $n$ 维的。为此，任取点 $p$ 的一个容许坐标卡 $(U,\phi_U)$，局部坐标 $u^i$ 定义为

$$u^i(q)=(\phi_U(q))^i=x^i\circ\phi_U(q),\quad q\in U, \tag{9.2.14}$$

其中 $x^i$ 是 $R^n$ 中取定的坐标系。因此 $u^i\in C_p^\infty$, $(du^i)_p\in T_p^*$。下面要证明$(du^i)_p$, $i=1,2,\cdots,n$, 就是 $T_p^*$ 的一组基。

首先，设$(df)_p\in T_p^*$，则 $f\circ\phi_U^{-1}$ 是定义在 $R^n$ 的一个开集 $V$ 上的光滑函数，在$\bar{U}=V\cap\phi_U^{-1}(U)$上，令 $F(x^1,\cdots,x^n)=f\circ\phi_U^{-1}(x^1,\cdots,x^n)$。于是，对于 $q\in\phi_U(\bar{U})$, $f(q)=F(u^1,\cdots,u^n)$ 是光滑函数。设 $a_k=(\partial F/\partial u^k)_{(u^1(p),\cdots,u^n(p))}$，则对任意的$\gamma\in\Gamma_p$有：

$$\begin{aligned}\langle\!\langle\gamma,[f]\rangle\!\rangle &=\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)\Big|_{t=0}\\ &=\frac{d}{dt}F(u^1\circ\gamma(t),\cdots,u^n\circ\gamma(t))\Big|_{t=0}\\ &=a_k\frac{d}{dt}(u^k\circ\gamma(t))\Big|_{t=0}\\ &=\langle\!\langle\gamma,a_k[u^k]\rangle\!\rangle,\end{aligned} \tag{9.2.15}$$

故

$$[f]-a_k[u^k]\in\mathscr{H}_p, \tag{9.2.16}$$

即

$$(df)_p=a_k(du^k)_p. \tag{9.2.17}$$

所以，$(df)_p$ 是$(du^i)_p$ $(i=1,2,\cdots,n)$的线性组合。

其次，若有一组实数 $b_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$使得

$$b_i(du^i)_p=0 \tag{9.2.18}$$

即 $b_i[u^i]\in\mathscr{H}_p$。于是，对任意的 $\gamma\in\Gamma_p$，有

$$\langle\!\langle \gamma, b_i[u^i] \rangle\!\rangle = b_i \frac{d(u^i \circ \gamma(t))}{dt}\bigg|_{t=0} = 0. \tag{9.2.19}$$

选取 $\lambda_k \in \Gamma_p$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 使得

$$u^i \circ \lambda_k(t) = u^i(p) + \delta^i_k t, \tag{9.2.20}$$

这里 $\delta^i_k$ 是 Kronerker 符号，则

$$\frac{d(u^i \circ \lambda_k(t))}{dt}\bigg|_{t=0} = \delta^i_k. \tag{9.2.21}$$

令 $\gamma = \lambda_k$，由(9.2.19)式则得到

$$b_k = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{9.2.22}$$

这表明$\{(du^i)_p, 1 \leqslant i \leqslant n\}$是线性无关的。于是它们构成$T^*_p$的一组基，称为$T^*_p$关于局部坐标系$u^i$的自然基。由此可见，$T^*_p$是$n$维的。

根据定义，$[f]-[g] \in \mathscr{H}_p$，当且仅当对任意的$\gamma \in \Gamma_p$都有$\langle\!\langle \gamma, [f] \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \gamma, [g] \rangle\!\rangle$，所以可以定义：

$$\langle\!\langle \gamma, (df)_p \rangle\!\rangle \stackrel{\mathrm{df}}{=} \langle\!\langle \gamma, [f] \rangle\!\rangle, \quad \gamma \in \Gamma_p, (df)_p \in T^*_p. \tag{9.2.23}$$

现在我们可以在$\Gamma_p$中定义关系$\backsim$如下：设$\gamma, \gamma' \in \Gamma_p$，则$\gamma \backsim \gamma'$，当且仅当对任意的$(df)_p \in T^*_p$有

$$\langle\!\langle \gamma, (df)_p \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \gamma', (df)_p \rangle\!\rangle. \tag{9.2.24}$$

显然，这个关系是等价关系。我们把$\gamma$的$\backsim$等价类记作$[\gamma]$，于是可定义

$$\langle [\gamma], (df)_p \rangle \stackrel{\mathrm{df}}{=} \langle\!\langle \gamma, (df)_p \rangle\!\rangle. \tag{9.2.25}$$

我们可以证明这些$[\gamma]$($\gamma \in \Gamma_p$)组成了$T^*_p$的对偶空间。为此目的，我们利用局部坐标系。设在局部坐标$u^i$下，$\gamma \in \Gamma_p$由函数

$$u^i = u^i(t), \quad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{9.2.26}$$

给出，则运算(9.2.25)可写成

$$\langle [\gamma], (df)_p \rangle = a_i \xi^i, \tag{9.2.27}$$

其中

$$a_i=\left(\frac{\partial(f\circ\phi_U^{-1})}{\partial u^i}\right)\bigg|_{\phi_U(p)},\ \xi^i=\left(\frac{du^i}{dt}\right)\bigg|_{t=0}, \qquad (9.2.28)$$

系数 $a_i$ 恰好是余切向量$(df)_p$关于自然基$(du^i)_p$的分量。显然，$\langle[\gamma],(df)_p\rangle$是$T_p^*$上的线性函数，这个函数由分量$\xi^i$完全确定。如果取$\gamma$为

$$u^i=u^i(p)+\xi^i t, \qquad (9.2.29)$$

于是$\xi^i$能取任意的数值，即$\langle[\gamma],(df)_p\rangle,\gamma\in\Gamma_p$表示了$T_p^*$上的全体线性函数，它们组成$T_p^*$的对偶空间$T_p$，叫做$M$在点$p$的**切空间**。切空间的元素$[\gamma]$称为**切向量**。

切向量的几何意义其实很简单：如果$\gamma\in\Gamma_p$是由函数

$$u^i=u^i(t), \qquad 1\leqslant i\leqslant n \qquad (9.2.30)$$

给出，则$[\gamma]=[\gamma']$的充分必要条件是

$$\left(\frac{du^i}{dt}\right)_{t=0}=\left(\frac{du'^i}{dt}\right)_{t=0}, \quad 1\leqslant i\leqslant n. \qquad (9.2.31)$$

所以$\gamma$和$\gamma'$等价的意思是这两条参数曲线在点$p$有同一个切向量。因此，我们所定义的流形$M$在点$p$的切向量恰是全体在点$p$有相同的切线的参数曲线的集合。

由(9.2.20)和(9.2.27)我们有

$$\langle[\lambda_k],(du^i)_p\rangle=\delta_k^i. \qquad (9.2.32)$$

所以，由(9.2.20)定义的$\{[\lambda_k],1\leqslant k\leqslant n\}$是$\{(du^i)_p,1\leqslant i\leqslant n\}$的对偶基。切向量$[\lambda_k]$还有另一个意义，即

$$\langle[\lambda_k],(df)_p\rangle=\langle[\lambda_k],\left(\frac{df}{du^i}\right)_p\cdot(du^i)_p\rangle$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial u^k}\right)_p, \qquad (9.2.33)$$

这里$\partial f/\partial u^i$表示$\partial(f\circ\phi_U^{-1})/\partial u^i$。所以对于函数芽$[f]$，$[\lambda_k]$是偏微商算子$(\partial/\partial u^k)$，称为在局部坐标系$(u^i)$下切空间$T_p$中的自然基。

设 $X\in T_p$，$f\in C_p^\infty$，记

$$Xf=\langle X,(df)_p\rangle, \tag{9.2.34}$$

$Xf$ 叫做函数 $f$ 沿切向量 $X$ 的方向导数。

光滑流形之间的光滑映射分别诱导出切空间之间和余切空间之间的线性映射。设 $F:M\to N$ 是光滑映射，$p\in M$，$q=F(p)\in N$，定义映射

$$F^*:\ T_q^*\to T_p^*,\ F^*(df)=d(f\circ F),\ df\in T_q^*. \tag{9.2.35}$$

显然，这是一个线性映射，称为**映射 F 的微分**。考虑 $F^*$ 的共轭映射 $F_*:T_p\to T_q$，即对任意的 $X\in T_p$，$a\in T_q^*$ 有

$$\langle F_*X,a\rangle=\langle X,F^*a\rangle, \tag{9.2.36}$$

$F_*$ 称为**由 F 诱导的线性切映射**，有时也将 $F_*$ 记为

$$F_*=\mathrm{grad}F. \tag{9.2.37}$$

## §9.3 Frobenius 定理

如果对流形 $M$ 的每一点 $p$ 指定 $M$ 在 $p$ 点的一个切向量 $X_p$，则称 $X$ 是流形 $M$ 上的切向量场。若 $f\in C^\infty(M)$，令

$$(Xf)_{(p)}=X_pf=\langle X_p,(df)_p\rangle, \tag{9.3.1}$$

则 $Xf$ 是流形 $M$ 上的实函数。如果对任意的 $f\in C^\infty(M)$，仍有 $Xf\in C^\infty(M)$，则称 $X$ 是流形 $M$ 上的光滑切向量场。描述光滑切向量场的性质有著名的 Frobenius 定理。为了证明该定理，我们先证明下面的

**引理 9.1** 光滑流形 $M$ 上的切向量场 $X$ 是光滑切向量场的充分必要条件是对任意一点 $p\in M$，存在 $p$ 点的局部坐标卡 $(U,u^i)$，使得 $X$ 限制在 $U$ 上可以表成

$$X\Big|_U=\xi^i\frac{\partial}{\partial u^i} \tag{9.3.2}$$

其中 $\xi^i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 $U$ 上的光滑函数。

**证明** 充分性是显然的。下面证明必要性。因为 $X$ 是 $M$ 上的光滑切向量场，所以 $X|_U$ 是开子流形 $U$ 上的光滑切向量场。切向量场 $X|_U$ 在自然基 $\{\partial/\partial u^i\}$ 下可表成

$$X\Big|_U=\xi^i\frac{\partial}{\partial u^i},\tag{9.3.3}$$

因为 $u^i$ 是 $U$ 上的光滑函数，所以

$$X|_U u^i=\xi^i\tag{9.3.4}$$

也是 $U$ 上的光滑函数。得证。

设 $X$ 和 $Y$ 是流形 $M$ 上两个光滑切向量场，它们的Poisson括号积定义为

$$[X,Y]\overset{\mathrm{df}}{=}XY-YX.\tag{9.3.5}$$

即 $[X,Y]$ 是作用在 $C^\infty(M)$ 上的算子，对任意的 $f\in C^\infty(M)$，有

$$[X,Y]f=X(Yf)-Y(Xf).\tag{9.3.6}$$

若 $X$、$Y$、$Z$ 是流形 $M$ 上的光滑切向量场，$f,g\in C^\infty(M)$，易逐条按定义直接验证：

$$[X,Y]=-[Y,X],\tag{9.3.7}$$

$$[X+Y,Z]=[X,Z]+[Y,Z],\tag{9.3.8}$$

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0,\tag{9.3.9}$$

$$[X,Y](f+g)=[X,Y]f+[X,Y]g,\tag{9.3.10}$$

$$[X,Y](fg)=f\cdot[X,Y]g+g\cdot[X,Y]f,\tag{9.3.11}$$

$$[fX,gY]=f\cdot(Xg)Y-g(Yf)X+fg[X,Y].\tag{9.3.12}$$

以(9.3.12)为例：设 $h\in C^\infty(M)$，则由 Poisson 括号积的定义得：

$$\begin{aligned}&[fX,gY]h\\&=(fX)((gY)h)-(gY)((fX)h)\\&=f\cdot X(g\cdot Yh)-g\cdot Y(f\cdot Xh)\\&=f\cdot(Xg)(Yh)+f\cdot gX(Yh)-g(Yf)(Xh)-g\cdot fY(Xh)\\&=(f(Xg)\cdot Y-g(Yf)\cdot X+f\cdot g[X,Y])h,\end{aligned}\tag{9.3.13}$$

因此(9.3.12)式成立。

现在我们可以用局部坐标系来表示$[X, Y]$。设$(U, u^i)$是流形$M$上的一个局部坐标系，$X$，$Y$有表示：

$$X|_U=\xi^i\frac{\partial}{\partial u^i}, \quad Y|_U=\eta^i\frac{\partial}{\partial u^i}, \tag{9.3.14}$$

其中$\xi^i$，$\eta^i$是$U$上的光滑函数。由于$[\partial/\partial u^i, \partial/\partial u^j]=0$，$(1\leqslant i, j\leqslant n)$，由括号积的定义和性质(9.3.12)有

$$[X,Y]|_U=[X|_U, Y|_U]=\left(\xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial u^i}-\eta^i\frac{\partial\xi^j}{\partial u^i}\right)\frac{\partial}{\partial u^j}, \tag{9.3.15}$$

由引理9.1知$[X,Y]$也是流形$M$上的光滑切向量场。

设$X$是流形$M$上的光滑切向量场，若在$p\in M$，$X_p=0$，则称点$p$为切向量场$X$的一个奇点。光滑切向量场在奇点$p$附近的性质是十分复杂的。但在非奇点附近的性状却很简单。我们有下面的

**引理9.2** 设$X$是流形$M$上的光滑切向量场，若在$p\in M$，$X_p\neq 0$，则存在$p$点的一个局部坐标系$(W, w^i)$使得

$$X|_W=\frac{\partial}{\partial w^1}. \tag{9.3.16}$$

**证明** 由引理9.1，存在点$p$的局部坐标系$(U,u^i)$，$u^i(p)=0$使得$X$限制在$U$上可表成

$$X|_U=\xi^i\frac{\partial}{\partial u^i}, \tag{9.3.17}$$

其中$\xi^i$是$U$上的光滑函数。因为$X_p\neq 0$，不妨设$\xi^1(p)\neq 0$。由于$\xi^i$的连续性，可假定$U$是$p$的充分小的邻域，使得函数$\xi^1$在$U$上处处不为零。考虑常微分方程组

$$\frac{du^a}{du^1}=\frac{\xi^a(u^1,\cdots,u^n)}{\xi^1(u^1,\cdots,u^n)}, \quad 2\leqslant a\leqslant n, \tag{9.3.18}$$

其中 $u^1$ 是自变量，而 $u^a$ $(2\leqslant a\leqslant n)$ 是未知函数。根据常微分方程理论，存在正数 $\delta$，使得 $\{(u^1,\cdots,u^n)\,|\,|u^i|<\delta\}\subset U$，并且对任意给定的初值 $(v^2,\cdots,v^n)$，$|v^a|<\delta$ $(2\leqslant a\leqslant n)$。方程组 (9.3.18) 有唯一解

$$u^a=\phi^a(u^1;\ v^2,\cdots,v^n),\qquad -\delta<u^1<\delta \tag{9.3.19}$$

满足初条件

$$\phi^a(0;\ v^2,\cdots,v^n)=v^a,\quad 2\leqslant a\leqslant n, \tag{9.3.20}$$

并且函数 $\phi^a$ 光滑地依赖于 $u^1$ 和初值 $v^a$。

作变量替换

$$\begin{cases} u^1=v^1, \\ u^a=\phi^a(v^1;\ v^2,\cdots,v^n),\quad 2\leqslant a\leqslant n, \end{cases} \tag{9.3.21}$$

则它的 Jacobi 行列式是

$$\left.\frac{\partial(u^1,\cdots,u^n)}{\partial(v^1,\cdots,v^n)}\right|_{v^1=1}=1. \tag{9.3.22}$$

所以存在点 $p$ 的一个邻域 $W\subset U$，以 $v^i(1\leqslant i\leqslant n)$ 为局部坐标系，在这个局部坐标系下

$$\begin{aligned} X|_W&=\xi^i\frac{\partial}{\partial u^i} \\ &=\xi^1\frac{\partial}{\partial u^1}+\sum_{a=2}^{m}\xi^a\frac{\partial}{\partial u^a} \\ &=\xi^1\left(\sum_{a=1}^{m}\frac{\partial u^i}{\partial u^1}\,\frac{\partial}{\partial u^i}\right)=\xi^1\frac{\partial}{\partial v^1}. \end{aligned} \tag{9.3.23}$$

令

$$\begin{cases} w^1=\displaystyle\int_0^{v^1}\frac{dv^1}{\xi^1}, \\ w^a=v^a,\qquad 2\leqslant a\leqslant n, \end{cases} \tag{9.3.24}$$

则 $w^i$ ($1\leqslant i\leqslant n$)是$W$上的局部坐标系，并且

$$X|_W=\frac{\partial}{\partial w^1},\tag{9.3.25}$$

引理证毕。

下面我们讨论更一般的情形。设在每一点 $p\in M$ 指定了切空间 $T_p$ 的一个 $h$ 维子空间 $L^h(p)$，即 $L^h$ 是 $M$ 上 $h$ 维切子空间场。若对每一点 $p\in M$，在 $p$ 的一个邻域$U$上存在 $h$ 个处处线性无关的光滑切向量场 $X_1,\cdots,X_h$，使得在每一点 $q\in U$，$L^h(q)$ 是由向量 $X_1(q),\cdots,X_h(q)$张成的，则称 $L^h$ 是光滑的 $h$ 维切子空间场，或称 $L^h$ 是流形$M$上**光滑的 h 维分布**，记为

$$L^h|_U=\{X_1,\cdots,X_h\}.\tag{9.3.26}$$

进一步地，如果对于流形$M$上给定的 $h$ 维分布 $L^h$，存在局部坐标系$(W,w^i)$使得

$$L^h|_W=\left\{\frac{\partial}{\partial w^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial w^h}\right\},\tag{9.3.27}$$

则称 $L^h$ 是可积的。问题是：在什么条件下 $h$ 维分布 $L^h$ 才是可积的？对此，我们有下面的

**Frobenius 定理** $h$ 维光滑分布 $L^h$ 是可积的，当且仅当它的局部生成集 $X_1,\cdots,X_h$ 满足条件

$$[X_\alpha,X_\beta]=c^\gamma_{\alpha\beta}X_\gamma,\quad \alpha,\beta=1,\cdots,h,\tag{9.3.28}$$

这里 $\gamma$（以及下面用希腊小写字母表示的重复指标）从 1 到 $h$ 求和，系数 $c^\gamma_{\alpha\beta}$ 是$M$上的光滑函数。

条件(9.3.28)又称 **Frobenius 条件**，并可改记为

$$[X_\alpha,X_\beta]\equiv 0 \mod X_\gamma,\quad \alpha,\beta,\gamma=1,\cdots,h.\tag{9.3.29}$$

**证明** 必要性。当(9.3.27)式成立，则向量场 $X_\alpha$ 可表成

$$X_\alpha=a^\beta_\alpha\frac{\partial}{\partial w^\beta}.\tag{9.3.30}$$

由于 $X_1,\cdots,X_h$ 是线性无关的，故 $\det(a^\beta_\alpha)\neq 0$。由 $[\partial/\partial w^\alpha$,

$\partial/\partial w^\beta]=0$，故类似于(9.3.15)有

$$[X_\alpha, X_\beta]=\left(a_\alpha^\delta\frac{\partial a_\beta^\gamma}{\partial w^\delta}-a_\beta^\delta\frac{\partial a_\alpha^\gamma}{\partial w^\delta}\right)\frac{\partial}{\partial w^\gamma}$$

$$=\left(a_\alpha^\delta\frac{\partial a_\beta^\gamma}{\partial w^\delta}-a_\beta^\delta\frac{\partial a_\alpha^\gamma}{\partial w^\delta}\right)\overset{-1}{a_\gamma^\lambda}X_\lambda, \quad (9.3.31)$$

取

$$c_{\alpha\beta}^\lambda=\left(a_\alpha^\delta\frac{\partial a_\beta^\gamma}{\partial w^\delta}-a_\beta^\delta\frac{\partial a_\alpha^\gamma}{\partial w^\delta}\right)\overset{-1}{a_\gamma^\lambda}, \quad (9.3.32)$$

则有(9.3.28)式。

为证明充分性，我们对分布的维数 $h$ 作归纳法。当 $h=1$ 时，由引理9.2知命题为真。假定充分性对于 $h-1$ 维分布成立。设分布 $L^h$ 由 $U$ 上处处无关的光滑切向量场 $X_1,\cdots,X_h$ 张成，且

$$[X_\alpha,X_\beta]\equiv 0 \mod X_\gamma, \quad 1\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant h. \quad (9.3.33)$$

由引理9.2，在点 $p$ 存在坐标系 $(y^1,\cdots,y^m)$ 使得

$$X_h=\frac{\partial}{\partial y^h}. \quad (9.3.34)$$

设

$$X'_\lambda=X_\lambda-(X_\lambda y^h)X_h, \quad 1\leqslant\lambda\leqslant h-1, \quad (9.3.35)$$

这里重复指标 $h$ 不求和。显然

$$X'_\lambda y^h=0, \quad 1\leqslant\lambda\leqslant h-1; \quad X_h y^h=1. \quad (9.3.36)$$

因为 $L^h=\{X'_1,\cdots,X'_{h-1},X_h\}$，所以这 $h$ 个切向量场仍满足 Frobenius 条件，故可设

$$[X'_\lambda,X'_\mu]\equiv a_{\lambda\mu}X_h \mod X'_\nu, \quad 1\leqslant\lambda,\mu,\nu\leqslant h-1, \quad (9.3.37)$$

将上式两边算子作用于函数 $y^h$，则得 $a_{\lambda\mu}=0$ $(1\leqslant\lambda,\ \mu\leqslant h-1)$。因此 $h-1$ 维分布 $L'^{h-1}=\{X'_1,\cdots,X'_{h-1}\}$ 适合 Frobenius 条件。根据归纳法假定，存在 $p$ 点的局部坐标系 $(z^1,z^2,\cdots,z^n)$ 使得

$$L'^{h-1}=\left\{\frac{\partial}{\partial z^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial z^{h-1}}\right\}. \tag{9.3.38}$$

上式也表明 $\partial/\partial z^\lambda$ $(1\leqslant\lambda\leqslant h-1)$ 可表成 $X'_\lambda$ $(1\leqslant\lambda\leqslant h-1)$ 的线性组合。由(9.3.36)第一式得

$$\frac{\partial}{\partial z^\lambda}y^h=0 \quad (1\leqslant\lambda\leqslant h-1). \tag{9.3.39}$$

由于 $L^h=\{\partial/\partial z^1,\cdots,\partial/\partial z^{h-1},X_h\}$，根据 Frobenius 条件可设

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^\lambda},X_h\right]=b_\lambda X_h \mod \frac{\partial}{\partial z^\mu}, \quad 1\leqslant\lambda,\mu\leqslant h-1. \tag{9.3.40}$$

将上式两边作用于 $y^h$，又得到 $b_\lambda=0$ $(1\leqslant\lambda\leqslant h-1)$，所以

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^\lambda},X_h\right]=\sum_{\mu=1}^{h-1}c_\lambda^\mu\frac{\partial}{\partial z^\mu}. \tag{9.3.41}$$

在坐标系$(z^1,\cdots,z^n)$下，设 $X_h$ 可表成

$$X_h=\sum_{i=1}^n\xi^i\frac{\partial}{\partial z^i}, \tag{9.3.42}$$

则

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^\lambda},\ X_h\right]=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\xi^i}{\partial z^\lambda}\frac{\partial}{\partial z^i}. \tag{9.3.43}$$

将上式与(9.3.41)对照，则得

$$\frac{\partial\xi^\rho}{\partial z^\lambda}=0, \quad 1\leqslant\lambda\leqslant h-1,\ h\leqslant\rho\leqslant n. \tag{9.3.44}$$

这说明 $\xi^\rho$ $(h\leqslant\rho\leqslant n)$ 只是 $z^h,\cdots,z^n$ 的函数。令

$$X'_h=\sum_{\rho=h}^n\xi^\rho\frac{\partial}{\partial z^\rho}, \tag{9.3.45}$$

则仍有

$$L^h=\left\{\frac{\partial}{\partial z^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial z^{h-1}},X'_h\right\}. \tag{9.3.46}$$

根据引理9.2，存在从$(z^h,\cdots,z^n)$到$(w^h,\cdots,w^n)$的局部坐标变换，使$X'_h$可表成

$$X'_h=\frac{\partial}{\partial w^h}. \tag{9.3.47}$$

上面的变换不涉及$z^1,\cdots,z^{h-1}$。再令$w^\lambda=z^\lambda$ $(1\leqslant\lambda\leqslant h-1)$，则$(w^1,\cdots,w^n)$成为点$p$的局部坐标系，在此坐标系下

$$L^h=\left\{\frac{\partial}{\partial w^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial w^h}\right\}. \tag{9.3.48}$$

定理证毕。

用同样的方法可以证明：流形$M$上$h$个光滑切向量场$X_1,\cdots,X_h$，在邻域$U$内是处处线性无关的，则在$U$的每一点$p$存在局部坐标系$(W,w^i)$使

$$X_\alpha|_W=\frac{\partial}{\partial w^\alpha},\quad 1\leqslant\alpha\leqslant h \tag{9.3.49}$$

的充分必要条件是

$$[X_\alpha,X_\beta]=0,\quad 1\leqslant\alpha,\ \beta\leqslant h. \tag{9.3.50}$$

## §9.4 纤 维 丛

纤维丛是§9.1末尾提到的积流形的推广。本节先讨论具体的张量丛，然后讨论微分几何中主要研究的一类特殊的纤维丛——向量丛。最后也介绍一下与标架丛有关的主丛的概念。

设$M$是$n$维光滑流形，$T_p$和$T^*_p$分别表示流形$M$在点$p$的切空间和余切空间。因此在流形$M$的每一点$p$有$(r,s)$型张量空间

$$T^r_s(p)=\underbrace{T_p\otimes\cdots\otimes T_p}_{r\text{个}}\otimes\underbrace{T^*_p\otimes\cdots\otimes T^*_p}_{s\text{个}}, \qquad (9.4.1)$$

它是形如 $v^{i_1}\otimes v^{i_2}\otimes\cdots\otimes v^{i_r}\otimes v^*_{j_1}\otimes v^*_{j_2}\otimes\cdots\otimes v^*_{j_s}$，$v^{i_1}$，$v^{i_2}$，…，$v^{i_r}\in T_p$，$v^*_{j_1}$，$v^*_{j_2}$，…，$v^*_{j_s}\in T^*_p$ 的元素所生成的 $n^{r+s}$ 维向量空间，是 $r$ 个切空间和 $s$ 个余切空间的张量积．它的元素称为 $(r, s)$型张量，其中 $r$ 是张量的逆变阶数，$s$ 是协变阶数．令

$$T^r_s=\bigcup_{p\in M}T^r_s(p), \qquad (9.4.2)$$

我们可以在 $T^r_s$ 中引进拓扑，使它成为有可数基的 Hausdorff 空间，进而可在 $T^r_s$ 上定义 $C^\infty$ 微分结构，使它成为一个光滑流形．这样得到的光滑流形在局部上可微同胚于积流形，我们把 $T^r_s$ 称为流形$M$上的$(r,s)$型张量丛．

我们先规定一些记法．设 $V$ 是 $R$ 上的 $n$ 维向量空间，用 $GL(V)$记向量空间 $V$ 的线性自同构群．在$V$中取定一组基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$，则$V$等同于 $R^n$．我们把$V$的元素 $y$ 记成坐标行

$$y=(y^1,\cdots,y^n), \qquad (9.4.3)$$

这样，$GL(V)$就是 $n\times n$ 阶非退化矩阵组成的乘法群，也就是说 $GL(V)$正是一般线性群 $GL(n;R)$．群$GL(V)$在空间 $V$ 上的作用记成右作用，用矩阵表示则是

$$y\cdot A=(y^1,\cdots,y^n)\begin{pmatrix} a^1_1\cdots a^n_1\\ \vdots\cdots\vdots\\ a^1_n\cdots a^n_n\end{pmatrix}, \qquad (9.4.4)$$

其中 $\det A=\det(a^i_j)\neq 0$．

$V^r_s$ 表示向量空间上的 $(r,s)$ 型张量空间（参见第七章），它的基是

$$e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{*j_1}\otimes\cdots\otimes e^{*j_s},\ 1\leqslant i_\alpha, j_\beta\leqslant n. \qquad (9.4.5)$$

这样 $V^r_s$ 中的元素都可以用分量表示，记为$y^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\in V^r_s$．考虑流形$M$的一个坐标系$(U, u^i)$，局部坐标是$u^1,\cdots,u^n$．这样，在任一个点$p\in U$，$T_p$ 和$T^*_p$分别有彼此对偶的自然基$\{(\partial/\partial u^1)_p, \cdots,$

$(\partial/\partial u^n)_p\}$和$\{(du^1)_p,\cdots,(du^n)_p\}$，因此$T^r_s(p)$有基

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}\right)_p\otimes\cdots\otimes\left(\frac{\partial}{\partial u^{i_r}}\right)_p\otimes(du^{j_1})_p\otimes\cdots\otimes(du^{j_s})_p,$$

$$(1\leqslant i_\alpha,j_\beta\leqslant n). \qquad (9.4.6)$$

现在就可以定义映射

$$\phi_U:\ U\times V^r_s\longrightarrow\bigcup_{p\in U}T^r_s(p), \qquad (9.4.7)$$

使得对于任意 $p\in U$、$y\in V^r_s$，$\phi_U(p,\ y)$ 是 $T^r_s(p)$ 的元素，并且$\phi_U(p,y)$关于基(9.4.6)的分量与 $y$ 关于基(9.4.5)的分量相同。显然，这样地定义的映射 $\phi_U$ 是 1-1 对应。

取$M$的一个坐标覆盖$\{U,W,\cdots\}$，设由(9.4.7)定义的相应的映射是$\{\phi_U,\phi_W,\cdots\}$。把诸如$U\times V^r_s$的各开子集在$\phi_U$下的像的集合取作$T^r_s$的拓扑基，易证明它们满足拓扑基的条件，这样确定的拓扑使$T^r_s$成为有可数基的Hausdorff空间，并且每一个由(9.4.7)式定义的映射是同胚。

固定一点$p\in U$，则可定义映射$\phi_{U,p}:V^r_s\to T^r_s(p)$，使得

$$\phi_{U,p}(y)=\phi_U(p,y),\quad y\in V^r_s. \qquad (9.4.8)$$

根据$\phi_U$的定义，映射$\phi_{U,p}$是向量空间$V^r_s$到$T^r_s(p)$的线性同构。若$W$是$M$的另一个包含$p$的坐标域，局部坐标是$w^1,\cdots,w^n$；令

$$g_{UW}(p)=\phi^{-1}_{W,p}\cdot\phi_{U,p}:\ V^r_s\to V^r_s, \qquad (9.4.9)$$

则$g_{UW}(p)$是向量空间$V^r_s$的自同构，$g_{UW}(p)\in GL(V^r_s)$。按(9.4.4)式所规定的，$GL(V^r_s)$的元素在$V^r_s$上的作用记为右作用。因此，对于$y$、$y'\in V^r_s$，使

$$\phi_U(p,y)=\phi_W(p,y') \qquad (9.4.10)$$

成立的充要条件是

$$y'=y\cdot g_{UW}(p). \qquad (9.4.11)$$

对于$M$的任意两个坐标域$U$和$W$，如果$U\cap W\neq\phi$，则由(9.4.9)定义了映射

$$g_{UW}: U\cap W \to GL(V_s^r). \tag{9.4.12}$$

下面要证明映射 $g_{UW}$ 是光滑的。不失一般性，只讨论 $r=s=1$ 的情况。切空间 $T_p$ 和余切空间 $T_p^*$ 关于局部坐标 $w^1,\cdots,w^n$ 的自然基是 $\{(\partial/\partial w^1)_p,\cdots,(\partial/\partial w^n)_p\}$ 和 $\{(dw^1)_p,\cdots,(dw^n)_p\}$。设 $y$，$y'\in V_1^1$，用分量表示是

$$y=y_j^i e_i\otimes e^{*j},\quad y'=y'^i_j e_i\otimes e^{*j} \tag{9.4.13}$$

因此

$$\begin{cases} \phi_U(p,y)=y_j^i\left(\dfrac{\partial}{\partial u^i}\right)_p\otimes(du^j)_p, \\ \phi_W(p,y)=y'^i_j\left(\dfrac{\partial}{\partial w^i}\right)_p\otimes(dw^j)_p. \end{cases} \tag{9.4.14}$$

在$U\cap W$上，自然基之间有以下关系

$$\begin{cases} du^i=\dfrac{\partial u^i}{\partial w^j}dw^j, \\ \dfrac{\partial}{\partial u^i}=\dfrac{\partial w^j}{\partial u^i}\dfrac{\partial}{\partial w^j}, \end{cases} \tag{9.4.15}$$

其中 $J_{UW}=(\partial w^j/\partial u^i)$是局部坐标变换的 Jacobi 矩阵。将(9.4.15)代入(9.4.10)和(9.4.14)两式得到

$$y'^i_j=y_l^k\left(\frac{\partial w^i}{\partial u^k}\right)_p\left(\frac{\partial u^l}{\partial w^j}\right)_p, \tag{9.4.16}$$

即

$$(y\cdot g_{UW}(p))_j^i=y_l^k\left(\frac{\partial w^i}{\partial u^k}\right)_p\left(\frac{\partial u^l}{\partial w^j}\right)_p. \tag{9.4.17}$$

若把 $y$ 记成坐标行 $(y_1^1,y_2^1,\cdots,y_n^1,y_1^2,\cdots,y_n^2,\cdots,y_1^n,\cdots,y_n^n)$，上式表明 $g_{UW}(p)$是 $n^2\times n^2$ 阶非退化矩阵，其元素是 Jacobi 矩阵 $J_{UW}$ 和它的逆矩阵的元素的积。因为 Jacobi 矩阵 $J_{UW}$ 和它的逆矩阵 $J_{UW}^{-1}=J_{WU}$ 都是由$U\cap W$上的光滑函数组成的，所以 $g_{UW}$ 在

$U\cap W$ 上也是光滑的。

按照$T^r_s$的拓扑结构，$\{\phi_U(U\times V^r_s),\ \phi_W(W\times V^r_s),\cdots\}$ 构成空间 $T^r_s$ 的坐标开覆盖，在每一个坐标域$\phi_U(U\times V^r_s)$上点$\phi_U(p,y)$的坐标是

$$(u^i(p),\ y^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}),\tag{9.4.18}$$

其中 $u^i$ 是流形$M$的坐标域$U$上的局部坐标，$y^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}$是$y\in V^r_s$关于基(9.4.5)的分量。当$U\cap W\neq\phi$时，由于$g_{UW}:U\cap W\to GL(V^r_s)$是光滑的，(9.4.11)式说明上面给出的$T^r_s$的坐标覆盖是$C^\infty$-相容的，因此，$T^r_s$成为一个光滑流形。显然，把$T^r_s(p)$中的元素映到点$p\in M$的自然投影

$$\pi:\ T^r_s\to M\tag{9.4.19}$$

是光滑的满映射。光滑流形$T^r_s$称为流形$M$上的$(r,s)$型**张量丛**，$\pi$ 称为**丛投影**，$T^r_s(p)$称为丛$T^r_s$在点的**纤维**。

令$r=1$，$s=0$，我们得到流形$M$上的 **切 丛**，记 作$\mathscr{T}(M)$；令$r=0$，$s=1$，得到流形$M$上的余切丛，记作$\mathscr{T}^*(M)$。设$f:M\to T^r_s$是光滑映射，如果，

$$\pi\circ f=\mathrm{id}(\text{恒等映射}):\ M\to M,\tag{9.4.20}$$

即对于任意的$p\in M$，$f(p)\in T^r_s(p)$，则称$f$是张量丛$T^r_s$的一个**光滑截面**，或称为$M$上的$(r,s)$型的光滑张量场。切丛$\mathscr{T}(M)$的截面就是$M$的切向量场，余切丛$\mathscr{T}^*(M)$的截面称为$M$上的**一次微分式**。

把上面讨论的张量丛的构造抽象化就得到下面的一般向量丛的概念：

设$E$、$M$是两个光滑流形，$\pi:E\to M$是映上的光滑映射。$V=R^q$是$q$维向量空间，如果给定了$M$的一个开覆盖$\{U,W,Z,\cdots\}$及一组映射$\{\phi_U,\phi_W,\phi_Z,\cdots\}$使得下列条件成立，则称$(E,M,\pi)$是流形$M$上的$q$维**向量丛**。其中$E$称为**丛空间**，$M$称为**底空**

间，$\pi$ 称为从投影，$V$是**纤维型**：

（1） 每一个映射 $\phi_U$ 是从$U\times R^q$ 到 $\pi^{-1}(U)$的可微同胚，而且对任意 $p\in U$，$y\in R^n$ 有

$$\pi\circ\phi_U(p,y)=p; \tag{9.4.21}$$

（2） 对于任意固定的 $p\in U$，令

$$\phi_{U,p}(y)=\phi_U(p,y),\quad y\in R^q, \tag{9.4.22}$$

则 $\phi_{U,p}:R^q\to\pi^{-1}(p)$是同胚，当$U\cap W\neq\phi$ 时，对任意的$p\in U\cap W$，要求

$$g_{UW}(p)=\phi_{W,p}^{-1}\circ\phi_{U,p}:\ R^q\to R^q \tag{9.4.23}$$

是向量空间 $V=R^q$ 的线性自同构，即 $g_{UW}(p)\subset GL(V)$；

（3） 对于$U\cap W\neq\phi$，映射 $g_{UW}:U\cap W\to GL(V)$ 是光滑的。

对任意的 $p\in M$，令 $E_p=\pi^{-1}(p)$，称为向量从$E$在点$p$上的纤维。设$U$是$M$中包含 $p$ 的坐标域，则纤维型$V$的线性结构通过映射 $\phi_{U,p}$可以搬到纤维 $E_p$上来，使 $E_p$成为 $q$ 维向量空间。由于条件(2)，$E_p$的线性结构与 $\phi_U$ 的选取无关。因此，在直观上可以把向量从$E$看作诸如 $U\times R^q$ 的积流形沿着同一个点 $p\in M$ 上的纤维粘合起来的结果，在粘合时要求纤维上的线性关系保持不变。

条件(3)中给出的映射 $g_{UW}:U\cap W\to GL(V)$适合下列相容条件：

（1） 对于 $p\in U$，$g_{UU}(p)=\mathrm{id}:V\to V$； (9.4.24)

（2） 若 $p\in U\cap W\cap Z\neq\phi$，则

$$g_{UW}(p)\cdot g_{WZ}(p)\cdot g_{ZU}(p)=\mathrm{id}:V\to V. \tag{9.4.25}$$

$\{g_{UW}\}$称为向量从$(E,M,\pi)$的**过渡函数族**。关于过渡函数族，有下面的

**定理** 设$M$是 $n$ 维光滑流形，$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是$M$的一个开覆盖，$V$是 $q$ 维向量空间。若对每一对指标 $\alpha$，$\beta\in I$，在 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$ 时

指定了一个光滑映射 $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to GL(V)$，它们适合相容条件(9.4.24)和(9.4.25)，则存在$M$上的 $q$ 维向量丛 $(E, M, \pi)$，它以$\{g_{\alpha\beta}\}$为过渡函数族。

上述定理的详细证明见文献[40]。该定理表明，过渡函数族$\{g_{\alpha\beta}\}$是向量丛的核心，构造向量丛，只要指出它的过渡函数族就可以了。

积流形$M \times R^q = E$是向量丛最简单的例子，称为$M$上平凡的向量丛，或积丛。前面提到的张量丛$T^r_s$也都是向量丛。下面再给出向量丛的几个例子：

**例 1** 向量丛$E$和$E'$的直和$E \oplus E'$。

设$E$和$E'$都是流形$M$上的向量丛，纤维型分别是$V$和$V'$，过渡函数族是$\{g_{UW}\}$和$\{g'_{UW}\}$。

令

$$h_{UW} = \begin{pmatrix} g_{UW} & 0 \\ 0 & g'_{UW} \end{pmatrix}, \tag{9.4.26}$$

则 $h_{UW}$ 是右作用在$V \oplus V'$上的线性自同构，且$\{h_{UW}\}$适合过渡函数族的相容条件(9.4.24)和(9.4.25)。流形$M$上以$\{h_{UW}\}$为过渡函数族，以$V \oplus V'$为纤维型的向量丛称为$E$和$E'$的直和，记作$E \oplus E'$。

**例 2** 向量丛的张量积 $E \otimes E'$。

设$E$和$E'$与例 1 相同。命 $h_{UW}$ 是 $g_{UW}$ 和 $g'_{UW}$ 的张量积，即$h_{UW} = g_{UW} \otimes g'_{UW}$，它们在$V \otimes V'$上的作用定义为

$$(v \otimes v') \cdot h_{UW} = (v \cdot g_{UW}) \otimes (v' \cdot g'_{UW}), \tag{9.4.27}$$

其中 $v \in V$，$v' \in V$。显然$\{h_{UW}\}$也适合过渡函数族的相容条件(9.4.24)和(9.4.25)。流形$M$上以$\{h_{UW}\}$为过渡函数族、以$V \otimes V'$为纤维型的向量丛称为 $E$ 和 $E'$ 的张量积，记作$E \otimes E'$。容易看出，流形$M$上的$(r, s)$型张量丛正是 $r$ 个切丛和 $s$ 个余切丛的张量积。

设 $s: M\to E$ 是光滑映射，如果

$$\pi\cdot s=\mathrm{id}: M\to M \tag{9.4.28}$$

则称 $s$ 是向量丛$(E,M,\pi)$的一个**光滑截面**。应该注意，向量丛$E$的处处不为零的光滑截面不一定存在，这种截面的存在反映了流形$M$一定的拓扑性质。

把向量丛的概念进一步推广可得到**纤维丛**的概念，我们不打算一般地介绍纤维丛的概念了，只介绍一种特殊的非向量丛的纤维丛——标架丛，它是与切丛密切相关的。

设$M$是 $n$ 维微分流形，所谓一个**标架**是指这样的一个组合$(p;e_1,\cdots,e_n)$：其中 $p$ 是$M$上一点，$e_1,\cdots,e_n$ 是流形$M$在点 $p$的 $n$ 个线性无关的切向量。流形上全体标架的集合记作 $\mathscr{F}$，我们可以在$\mathscr{F}$中引进微分结构使之成为光滑流形，并且使自然投影

$$\pi(p;e_1,\cdots,e_n)=p \tag{9.4.29}$$

是从$\mathscr{F}$到$M$的光滑映射，$(\mathscr{F},M,\pi)$称为$M$上的**标架丛**，简记为$\mathscr{F}(M)$。

在$\mathscr{F}$中引进微分结构的方法与张量丛的做法是类似的。设$(U,u^i)$是$M$的任意一个坐标域，则在$U$上有自然标架场$(p;\partial/\partial u^1,\cdots,\partial/\partial u^n)$，所以$U$上的任意一个标架$(p;e_1,\cdots,e_n)$可以表成

$$e_i=X_i^k\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)_p,\quad 1\leqslant i\leqslant n, \tag{9.4.30}$$

其中$(X_i^k)$是非退化的 $n\times n$ 矩阵，因此它是 $GL(n,R)$中的一个元素。于是，可以定义映射 $\phi_U:U\times GL(n,R)\to\pi^{-1}(U)$，使得对任意的 $p\in U$ 以及$(X_i^k)\in GL(n,R)$有

$$\phi_U(p,X_i^k)=(p;e_1,\cdots,e_n), \tag{9.4.31}$$

其中 $e_i$ 由(9.4.30)式所给出。显然，这样定义的 $\phi_U$ 是1-1对应。这里 $GL(n,R)$代替了张量丛中 $V_s^r$ 的地位。因此，完全可以类似地证明，由拓扑积$U\times GL(n,R)$的全体开集在 $\phi_U$ 下的像的集合构成$\mathscr{F}$的一个拓扑基，关于这种拓扑结构，映射

$$\phi_U: U\times GL(n,R)\to\pi^{-1}(U) \tag{9.4.32}$$

是同胚。通过映射$\phi_U$，$\pi^{-1}(U)$就成为$\mathscr{E}$的一个坐标域。若$U\cap W\neq\phi$，则流形$M$在$U\cap W$上有局部坐标变换

$$w^i=w^i(u^1,\cdots,u^n),\quad 1\leqslant i\leqslant n, \tag{9.4.33}$$

相应的自然基有如下关系

$$\frac{\partial}{\partial u^i}=\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\,\frac{\partial}{\partial u^j}, \tag{9.4.34}$$

而$U\cap W$上的一个标架$(p;e_1,\cdots,e_n)$在两个坐标系下的坐标$(u^i, X^k_i)$和$(w^i, Y^k_i)$适合关系

$$\phi_U(u^i,X^k_i)=\phi_W(w^i,Y^k_i), \tag{9.4.35}$$

即$w^i$和$u^i$由(9.4.33)式关联，并且

$$X^k_i\frac{\partial}{\partial u^k}=Y^k_i\frac{\partial}{\partial w^k} \tag{9.4.36}$$

或

$$Y^k_i=X^j_i\,\frac{\partial w^k}{\partial u^j}. \tag{9.4.37}$$

显然$w^i$、$Y^k_i$都是$u^i$和$X^k_i$的光滑函数，故$\mathscr{E}$的坐标域$\pi^{-1}(U)$和$\pi^{-1}(W)$都是$C^\infty$-相容的，于是$\mathscr{E}$成为$n+n^2$维光滑流形，而且自然投影$\pi: \mathscr{E}\to M$是光滑的满映射。

上面的(9.4.31)式说明映射$\phi_U$给出了流形$\mathscr{E}$的局部乘积的结构，即$\pi^{-1}(U)$可微同胚于直积$U\times GL(n;R)$，对于任意的$p\in U$，令

$$\phi_{U,p}(X)=\phi_U(p,X),\quad X\in GL(n;R), \tag{9.4.38}$$

则$\phi_{U,p}: GL(n;R)\to\pi^{-1}(p)$是同胚。

若$U\cap W\neq\phi$，对$p\in U\cap W$，映射$\phi_{W,p}^{-1}\circ\phi_{U,p}$是$GL(n;R)$到自身的同胚。由(9.3.37)式可知$\phi_{W,p}^{-1}\circ\phi_{U,p}$恰是Jacobi矩阵$J_{UW}=(\partial w^k/\partial u^i)$在群$GL(n;R)$上的右平移。可见$\{J_{UW}\}$构成标架丛$\mathscr{E}$的过渡函数族。过渡函数族和纤维型都是$GL(n;R)$的丛叫做

以 $GL(n;R)$为**结构群**的**主丛**。因此，标架丛$\mathscr{E}(M)$是与流形 $M$ 的切丛$\mathscr{T}(M)$相伴的主丛。

## §9.5 连　络

要对向量丛的截面——流形上的向量场进行微分，需要在向量丛上引进称为“连络”的结构。仿射连络就是加在微分流形上，为使我们能对张量场进行“微分”的结构。为今后需要，我们只讨论仿射连络。

设$M$是一个$n$维微分流形，$M$上的切丛是它的切空间的并集

$$\mathscr{T}(M)=\bigcup_{p\in M}T_p, \tag{9.5.1}$$

切丛的纤维是基空间$M$的切空间，投影映射是

$$\pi:\ \mathscr{T}(M)\to M, \tag{9.5.2}$$

使得

$$\pi(T_p)=p,\quad \forall p\in M. \tag{9.5.3}$$

我们可以如前面讨论的那样，在$\mathscr{T}(M)$上引进微分结构。设$(x^i)$是定义在$M$的坐标域$U$的一个坐标系，则 $\{\partial/\partial x^i,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$ 是$T_p$的一组自然基。对$\mathscr{T}(M)$上的任意一点$(p,v)\in\mathscr{T}(M)$，我们可由

$$x^i(p,v)=x^i(p) \tag{9.5.4}$$

和

$$v^i(p,v)=\left\langle v,\frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle \tag{9.5.5}$$

定义$\mathscr{T}(U)$上的一个坐标系$(x^i,\ v^i)$，称为坐标系$(x^i)$的**提升坐标系**。易证这样定义的坐标系是$C^\infty$-相容的。于是，相对于由提升坐标系推导出来的微分结构，$\mathscr{T}(M)$成为$2n$维的微分流形。$\mathscr{T}(M)$上的一个横截面是光滑映射

$$u: M \to \mathscr{T}(M) \tag{9.5.6}$$

使得
$$\pi \circ u = \mathrm{id}(\text{恒等映射}). \tag{9.5.7}$$

它是$M$上的一个光滑向量场。因为$\mathscr{T}(M)$是微分流形，在每点$(p,v)\in\mathscr{T}(M)$同样可引进$\mathscr{T}(M)$的切空间，为与$T_p$区别，今后我们都将它记为$\mathscr{T}(M)_{(p,v)}$，易见

$$\dim\mathscr{T}(M)_{(p,v)} = 2n. \tag{9.5.8}$$

相对于由坐标系$(x^i)$通过(9.5.4)和(9.5.5)定义的提升坐标系$(x^i, v^i)$，投射映射(9.5.2)有表示

$$\pi^i(x^1, \cdots, x^n, v^1, \cdots, v^n) = x^i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{9.5.9}$$

因此$\pi$是光滑流形$\mathscr{T}(M)$和$M$之间的光滑映射。由它诱导的线性切映射(9.2.36)现在写成

$$\pi_* = \mathrm{grad}\pi: \mathscr{T}(M)_{(p,v)} \to T_p, \tag{9.5.10}$$

它应有分量矩阵($n\times 2n$矩阵)：

$$[\mathrm{grad}\pi^i_a] = \begin{bmatrix} 1 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 \\ 0 & 1\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 \\ \vdots & \vdots\ddots\vdots & \vdots & \vdots\ddots\vdots \\ 0 & 0\cdots 1 & 0 & 0\cdots 0 \end{bmatrix}, \tag{9.5.11}$$

换句话说，$\pi_*$满足条件

$$\pi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(p,v)} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{9.5.12}$$

$$\pi\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)_{(p,v)} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{9.5.13}$$

这里$(\partial/\partial x^i)_{(p,v)}$，$(\partial/\partial v^i)_{(p,v)}\in\mathscr{T}(M)_{(p,v)}$是流形$\mathscr{T}(M)$在点$(p,v)$的切向量，而$(\partial/\partial x^i)_p\in T_p$是流形$M$在点$p$的切向量。我们定义$\mathscr{T}(M)$在点$(p,v)$的**垂直空间**$\mathscr{V}_{(p,v)}$为

$$\mathscr{V}_{(p,v)} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathrm{Ker}\pi_{*(p,v)}, \tag{9.5.14}$$

这里Ker表示映射$\pi_{*(p,v)}$的核，即

$$\mathrm{Ker}\,\pi_{*(p,v)} \equiv \{X \in \mathscr{T}(M)_{(p,v)} \mid \pi_{*(p,v)} X = 0\}. \quad (9.5.15)$$

从(9.5.3)我们有

$$T_p = \pi^{-1}(p), \quad \forall p \in M. \quad (9.5.16)$$

因此，垂直空间$\mathscr{V}_{(p,v)}$只不过是在点$v \in T_p$的$T_p$的切空间，

$$\dim \mathscr{V}_{(p,v)} = n.$$

$\mathscr{T}(M)_{(p,v)}$的一个$n$维子空间$\mathscr{H}_{(p,v)}$称为在$(p,v)$点的**水平空间**或**基准空间**，如果$\mathscr{V}_{(p,v)} \cup \mathscr{H}_{(p,v)}$生成$\mathscr{T}(M)_{(p,v)}$。换句话说，$\mathscr{T}(M)_{(p,v)}$可分解成$\mathscr{V}_{(p,v)}$和$\mathscr{H}_{(p,v)}$的直和：

$$\mathscr{T}(M)_{(p,v)} = \mathscr{V}_{(p,v)} \oplus \mathscr{H}_{(p,v)}. \quad (9.5.17)$$

显然，与垂直空间不同，水平空间$\mathscr{H}_{(p,v)}$不是唯一的。一个光滑的水平空间场$\mathscr{H}$（即对每一点$(p,v)$，$\mathscr{H}$的值$\mathscr{H}_{(p,v)}$是$\mathscr{T}(M)_{(p,v)}$的水平空间）称为$\mathscr{T}(M)$上的**连络**。

一个连络将引起沿$M$的一条曲线的平行移动的概念。设$\mathscr{H}$是$\mathscr{T}(M)$上的一个连络，$\lambda(t)$是$M$的一条可微曲线

$$\lambda(t):\ (a,b) \to M, \quad (9.5.18)$$

那么$\mathscr{T}(M)$的一条可微曲线$\bar{\lambda}(t)$：

$$\bar{\lambda}(t):\ (a,b) \to \mathscr{T}(M) \quad (9.5.19)$$

称为$\lambda(t)$**相对于$\mathscr{H}$的水平提升**，如果对所有$t \in (a,b)$，$\bar{\lambda}(t)$满足下面两个条件：

$$[\bar{\lambda}(t)] \in \mathscr{H}_{\bar{\lambda}(t)}, \quad (9.5.20)$$

$$\pi(\bar{\lambda}(t)) = \lambda(t). \quad (9.5.21)$$

第一个条件表明$\bar{\lambda}(t)$是相对于$\mathscr{H}$的一条水平曲线，第二个条件表明对所有的$t$，$\bar{\lambda}(t)$都属于在$\lambda(t)$的纤维。因为曲线$\lambda(t)$是一维的，连络$\mathscr{H}$和曲线$\lambda$是光滑的，经典的隐函数存在唯一性定理保证了通过在$\lambda(0)$处的纤维的一个初始点$v(0)$，存在唯一的一个水平提升$\bar{\lambda}(t,v(0))$使得

$$\bar{\lambda}(0,v(0)) = (\lambda(0),v(0)). \quad (9.5.22)$$

换句话说，存在一族$\lambda$的水平提升，使得每个点$(\lambda(t),v(t)) \in$

$\pi^{-1}(\lambda(t))$被包含于一个且只有一个水平提升之中。于是，我们可以将$\lambda$的水平提升理解为一族单参数映射

$$\rho_{0,t}:\ T_{\lambda(0)}\to T_{\lambda(t)},\tag{9.5.23}$$

使得对所有$v(0)\in T_{\lambda(0)}$有

$$\bar{\lambda}(t,v(0))=(\lambda(t),\rho_{0,t}(v(0))).\tag{9.5.24}$$

按这个方法定义的映射$\rho_{0,t}$是切空间$T_{\lambda(0)}$与沿$\lambda$的纤维$T_{\lambda(t)}$的微分同胚，称为由连络$\mathscr{H}$导出的沿$\lambda(t)$的**平行移动**。

从(9.5.17)我们看到，相对于任一提升坐标系$(x^i,v^j)$，$\mathscr{T}(M)_{(p,v)}$的自然基是$\{(\partial/\partial x^i)_{(p,v)},\ (\partial/\partial v^j)_{(p,v)}\}$，$\mathscr{V}_{(p,v)}$的基是$\{(\partial/\partial v^j)_{(p,v)}\}$，故$\mathscr{H}_{(p,v)}$的一组基是

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(p,v)}-\Gamma_i^j(x,v)\left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right)_{(p,v)}\right\},\tag{9.5.25}$$

这里$\Gamma_i^j$是$(x^i,v^j)$的$C^\infty$-函数。令$\lambda(t)$相对于$(x^i)$的坐标是$\lambda^i(t)$，而$\bar{\lambda}$相对于$(x^i,v^j)$的坐标是$(\lambda^i(t),\ v^j(t))$，那么条件(9.5.21)自动满足，而条件(9.5.20)等价于微分方程组

$$\frac{dv^j(t)}{dt}+\Gamma_i^j(\lambda^1(t),\cdots,\lambda^n(t),v^1(t),\cdots,v^n(t))\cdot\frac{d\lambda^i(t)}{dt}=0,\quad 1\leqslant j\leqslant n.\tag{9.5.26}$$

我们称这组方程是在坐标系$(x^i)$中沿$\lambda$的**平行移动方程**。这组方程在初值$v^j(0)$下的解给出$v(0)$的平行移动$\rho_{0,t}(v(0))$。

由上面的讨论可知，连络$\mathscr{H}$实际上是流形$M$上的光滑切子空间场，可以如同§9.3那样讨论它的可积性问题。如果连络是可积的，那么，局部地存在通过每一点$(x,v)\in\mathscr{T}(M)$的一个水平横截面。这时，任一曲线$\lambda$的水平提升仅仅是垂直圆柱面$\pi^{-1}(\lambda)$与水平横截面的交线。结果，平行移动是局部地与路径无关的。反之，如果平行移动局部地与路径无关，那么平行向量的局部横截面是水平的，且因此连络是可积的。于是，由$\mathscr{H}$导出的平行移

动的路径无关性是由连络的可积条件表征的。当然，一个连络一般地不必是可积的。因此，我们一般不能要求平行移动是路径无关的。

其次，我们看到由连络导出的平行移动一般不必是线性的。这一点易从平行移动方程(9.5.26)看出，该方程组不必关于 $v$ 是线性的。要使沿所有曲线的平行移动都是线性同胚，充分且必要的条件是函数 $\Gamma^i_j(x^1,\cdots,x^n,\ v^1,\cdots,v^n)$ 关于 $v^k$ 是线性的，即

$$\Gamma^i_j(x^1,\cdots,x^n,\ v^1,\cdots,v^n)=\Gamma^i_{kj}(x^1,\cdots,x^n)v^k, \qquad (9.5.27)$$

满足上述条件的连络称为**仿射连络**。尽管可积的连络仅仅对某些流形才存在，但仿射连络却是对所有流形都存在的。我们下面将简短地证明这一点。在后面的讨论中，我们只用到仿射连络。(9.5.27)式中表征了仿射连络的函数 $\Gamma^i_{kj}(x^1,\cdots,x^n)$ 称为连络 $\mathscr{H}$ 相对于坐标系 $(x^i)$ 的**连络符号**。我们首先推导连络符号关于坐标变换的变换规律。从(9.5.25)和(9.5.27)知，水平空间 $\mathscr{H}_{(p,v)}$ 是由集合

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(p,v)}-\Gamma^k_{ji}(x^1,\cdots,x^n)v^j\left(\frac{\partial}{\partial v^k}\right)_{(p,v)}\right\} \qquad (9.5.28)$$

张成的。令 $\bar{\Gamma}^k_{ji}$ 是 $\mathscr{H}$ 相对于另一坐标系 $(\bar{x}^i)$ 的连络符号，那么 $\mathscr{H}_{(p,v)}$ 也可由集合

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\right)_{(p,v)}-\bar{\Gamma}^k_{ji}(\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^n)\bar{v}^j\left(\frac{\partial}{\partial \bar{v}^k}\right)_{(p,v)}\right\} \qquad (9.5.29)$$

张成。因为提升坐标系 $(x^i,v^j)$ 与 $(\bar{x}^i,\bar{v}^j)$ 间有关系

$$\bar{x}^i=\bar{x}^i(x^1,\cdots,x^n) \qquad (9.5.30)$$

和

$$\bar{v}^i=\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}v^j, \qquad (9.5.31)$$

它们的自然基服从通常的变换规律

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(p,v)}=\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\bigg|_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right)_{(p,v)}$$

$$+\frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^i \partial x^k}\bigg|_p v^k\left(\frac{\partial}{\partial \bar{v}^j}\right)_{(p,v)}, \tag{9.5.32}$$

和

$$\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)_{(p,v)}=\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\bigg|_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{v}^j}\right)_{(p,v)}. \tag{9.5.33}$$

将(9.5.32)和(9.5.33)代入(9.5.28)中去并注意到 Jacobi 矩阵 $[\partial \bar{x}^i/\partial x^j]$是非奇异的，我们看到$\mathscr{H}_{(p,v)}$可由集合

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\right)_{(p,v)}-\left(\Gamma^m_{pq}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m}-\frac{\partial^2 \bar{x}^k}{\partial x^p \partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\right)\bar{v}^j\left(\frac{\partial}{\partial \bar{v}^k}\right)_{(p,v)}\right\} \tag{9.5.34}$$

所张成。比较(9.5.29)和(9.5.34)式得到

$$\overline{\Gamma}^k_{ji}=\Gamma^m_{pq}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m}-\frac{\partial^2 \bar{x}^k}{\partial x^p \partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}. \tag{9.5.35}$$

变换规律(9.5.35)可用来根据连络符号定义一个仿射连络，正如我们用张量的分量的变换规律来定义张量一样：设对每个坐标系$(x^i)$都指定了一组函数 $\Gamma^i_{jk}$，它们之间满足变换规律(9.5.35)。那么，我们可以简单地将 $\mathscr{H}_{(p,v)}$ 定义为由集合(9.5.28)张成的子空间。变换规律(9.5.35)保证了这样定义的子空间 $\mathscr{H}_{(p,v)}$ 是与坐标系的选取无关的。现在，我们按这个方法去证明仿射连络的一般的存在性定理。

在$M$的某个带有坐标系$\kappa=(x^i)$的坐标邻域$U$，一个仿射连络$\mathscr{H}_\kappa$显然是存在的。事实上，我们只要选$\mathscr{H}_\kappa$是这样的一个水平空间，它在$U$上的水平横截面都是相对于$x^i$有常数值分量的截面。换句话说，$\mathscr{H}_\kappa$ 相对于$(x^i)$的连络符号恒为零，于是对所有$x\in U$，由

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(p,v)}\right\} \tag{9.5.36}$$

张成 $\mathscr{H}_{K(y,v)}$。然而，这样选取的 $\mathscr{H}_K$ 未能给出整体的连络 $\mathscr{H}$，因为 $\mathscr{H}_K$ 相对于不同的坐标系的连络符号间不满足变换规律(9.5.35)。为了构造一个整体的仿射连络，我们采用所谓**单位分解**的办法。由拓扑学的**单位分解定理**我们知，对光滑流形$M$，存在一组所谓局部有限的开覆盖$\{U_\alpha,\ \alpha\in I\}$，即对每个$x\in M$，仅有有限多个 $\alpha\in I$ 使 $x\in U_\alpha$。与这一开覆盖相联系的一个单位分解存在，它是相应的一组可微函数$\{f_\alpha\}$，满足

i） 对每一个$\alpha\in I$,

$$0\leqslant f_\alpha\leqslant 1, \tag{9.5.37}$$

且在$U_\alpha$之外$f_\alpha$恒为零；

ii） 对每一个$x\in M$

$$\sum_{\alpha\in I} f_\alpha(x)=1. \tag{9.5.38}$$

由于开覆盖$\{U_\alpha,\ \alpha\in I\}$是局部有限的，条件ii)的左边仅有有限多项 $f_\alpha(x)$ 不为零，故和式是有意义的。单位分解定理的详细证明可参见有关专著[2][40]。

设$\{(U_\alpha,\ \kappa_\alpha)\}$是局部有限地覆盖$M$的一组坐标卡，且$\{f_\alpha\}$是与该覆盖相联系的一个单位分解。我们如同前面讲的那样对每个卡$(U_\alpha,\ \kappa_\alpha)$引进一个局部的仿射连络$\mathscr{H}_\alpha$。设$x$是$M$的任意一点，$(x^i)$是定义在$x$的邻域的任一坐标系，记$\mathscr{H}_\alpha$ 相对于$(x^i)$的连络符号为$\Gamma^i_{jk}(x,\alpha)$。由于$\{(U_\alpha,\kappa_\alpha)\}$是局部有限的开覆盖，$x$ 仅属于有限多个 $\mathscr{H}_\alpha$。于是我们令

$$\Gamma^i_{jk}(x)\equiv\sum_{\alpha\in I} f_\alpha(x)\Gamma^i_{jk}(x,\alpha), \tag{9.5.39}$$

这里参与求和的非零项只有有限多个，故和仍是 $(x^1,\cdots,x^n)$的可微函数。我们说，按此方法定义的 $\Gamma^i_{jk}(x)$ 将满足变换规律(9.5.35)，从而它给出一个整体的仿射连络。

事实上，对每个$\alpha$，$\Gamma^i_{jk}(x,\alpha)$的变换规律是

$$\overline{\Gamma}^k_{ji}(x,a)=\Gamma^m_{pq}(x,a)\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m}$$

$$-\frac{\partial^2\bar{x}^k}{\partial x^p\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}, \tag{9.5.40}$$

用$f_a(x)$乘上式的两边并将它们对$a$求和，由定义式(9.5.39)得到

$$\overline{\Gamma}^k_{ji}(x)=\Gamma^m_{pq}(x)\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m}$$

$$-\sum_{a\in I}f_a(x)\frac{\partial^2\bar{x}^k}{\partial x^p\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}, \tag{9.5.41}$$

由于$\sum_{a\in I}f_a(x)=1$，上式最后一项与 (9.5.35) 式是一样的．这就完成了我们的关于仿射连络的一般的存在性的证明．

应该注意，单位分解$\{f_a\}$的条件(9.5.38)保证了(9.5.39)的右边对$x$是光滑的．然而，尽管在前面构造$\mathscr{H}$时所用的局部连络$\mathscr{H}_a$都是可积的，整体连络$\mathscr{H}$一般却不是可积的．

利用§9.3中介绍的Frobenius定理我们可求得一个连络$\mathscr{H}$可积的充分必要条件．记(9.5.28)式表示的$\mathscr{H}_{(p,v)}$的基为

$$\zeta_i=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(p,v)}-\Gamma^k_{ji}(x^1,\cdots,x^n)v^j\left(\frac{\partial}{\partial v^k}\right)_{(p,v)}, \tag{9.5.42}$$

于是，

$$\mathscr{H}_{(p,v)}=\{\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n\} \tag{9.5.43}$$

是$M$上的$n$维光滑分布，由 Frobenius 定理知，$\mathscr{H}$是可积的，当且仅当它的局部生成集$\zeta_1,\cdots,\zeta_n$满足 Frobenius 条件

$$[\zeta_i,\zeta_j]\equiv 0 \quad \mathrm{mod}\,\zeta_k,\qquad 1\leqslant i,j,k\leqslant n. \tag{9.5.44}$$

将(9.5.42)代入(9.5.44)的左边得到

$$[\zeta_k,\zeta_l]=\zeta_k\zeta_l-\zeta_l\zeta_k$$

$$=\left(\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^k}+\Gamma^i_{ml}\Gamma^m_{jk}-\Gamma^i_{mk}\Gamma^m_{jl}\right)$$

$$\cdot v^j\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)_{(p,v)} = R^i{}_{jkl}v^j\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)_{(p,v)}, \qquad (9.5.45)$$

这里

$$R^i{}_{jkl} \equiv \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{ml}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^i_{mk}\Gamma^m_{jl} \qquad (9.5.46)$$

称为连络$\mathscr{H}$相对于 $(x^i)$ 的 曲 率符号。根据连络符号的变换规律(9.5.35)易验证曲率符号$R^i{}_{jkl}$满足张量场的分量的变换规律。因此，由曲率符号将定义了一 个 张 量 场 **R**，称为连络$\mathscr{H}$的曲率张量。注意到 $(\partial/\partial v^i)_{(p,v)}$ 正是 $\mathscr{V}_{(p,v)}$ 的 自 然基，由 (9.5.17)和(9.5.44)立即得到$\zeta_1,\cdots,\zeta_n$满足 Frobenius 条件，当且仅当

$$R^i{}_{jkl}v^j=0, \qquad (9.5.47)$$

而由$v^j$的任意性，我们最后得到连络$\mathscr{H}$可积的充分必要条件是

$$R^i{}_{jkl}=0; \qquad (9.5.48)$$

或等价地

$$\mathbf{R}=0. \qquad (9.5.49)$$

一个仿射连络称为对称的，如果它的连络符号 $\Gamma^i_{jk}$关于下标$j$和$k$对称。从连络符号的变换规律(9.5.35)可以看到这一条件不依赖于坐标系的选取，以致定义了连络的内禀性质。很显然，上面讨论的局部连络$\mathscr{H}_a$全是对称的，因为相对于坐标卡$(U_a,\kappa_a)$连络 $\mathscr{H}_a$ 的连络符号全为零。于是，从上面的连络的存在性的证明过程可知，任一流形$M$的切丛$\mathscr{T}(M)$总可赋予一个对称的仿射连络。然而，在稍后的应用中，我们需要采用服从某种附加条件的仿射连络。因为在某些情况下附加的限制不能由对称的仿射连络所满足，因此，我们不仅仅限于讨论对称的仿射连络。

如果$\mathscr{H}$是任一连络，从连络符号的变换规律(9.5.35)可以看到，由

$$S_{jk}{}^i \overset{\text{df}}{=} \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} \qquad (9.5.50)$$

定义的量$S_{jk}{}^i$满足张量的变换规律。于是，我们可用它们作为分

量来定义一个张量S，称为连络$\mathscr{H}$的挠率张量。对称连络的挠率张量S恒为零，故对称连络又称无挠率的连络。

连络$\mathscr{H}$的曲率张量R和挠率张量S是描述连络性质的重要的量，它们的几何意义可以如同§7.9、§7.10那样给予说明。

最后我们指出，在$\mathscr{T}(M)$中引进连络$\mathscr{H}$之后，我们就可以通过由连络$\mathscr{H}$导出的平行移动比较向量（或张量）在$x$点和无限邻近的$x+dx$点的值，从而像第七章讨论的那样引进绝对微分和协变导数的概念，这里就不再重复了。

# 第十章 变形体非协调理论的理性理论

前面介绍的用微分几何来解决缺陷问题的理论由关于晶格缺陷的几何结构获得启发，演绎地建立起一定的几何构造去描述位错和缺陷的连续分布，给出了能简单地表示复杂关系的漂亮形式。但是在具体做法上各家的手法有所不同，而且引进的几何构造往往带有比较明显的人为的痕迹。理性力学工作者试图将问题统一地考虑，使之成为一个完整的数学问题。更重要的是Noll，C. C. Wang等人的工作已经显示，一旦关于物质（主要是所谓物质上同样的光滑体）的本构假设建立起来，物质的几何结构就完全被确定了。于是，几何结构是理论的自然结果而不是作为理论的出发点的最初假设。当然，为了应用数学工具，又添进了光滑性等一些局限，理论仍有待进一步完善和发展。下面介绍一下描述简单物质，主要是弹性物质不均匀性的连续统理论，它给出了变形体非协调理论的一个理性的理论框架。

## §10.1 简 单 物 质

连续统力学讨论的是变形体的运动（和变形）。可以测量的基本量是距离和时间间隔。只有在给定的参考标架（即某个确定的带时钟的观察者）下才能谈论某个事件的位置（在空间的和时间的位置）。这种带时钟的参考标架称为"时空系"，记为$\Sigma$，它是被赋予刚性标架的称为物理空间的三维欧氏空间$\Phi$和一个称为

时间的一维欧氏空间$R$的乘积空间

$$\Sigma=\Phi\times R. \tag{10.1.1}$$

为了确定在$\Phi$中一个位置$\mathbf{x}$，我们可用一个笛卡尔直角坐标系$(x^i)$，即可以记$\mathbf{x}$为

$$\mathbf{x}=\mathbf{O}+x^i\mathbf{e}_i, \tag{10.1.2}$$

这里$\mathbf{O}$和$\{\mathbf{e}_i\}$是笛氏坐标系的原点和坐标基。相对于这个坐标系，$\Phi$就与一个有向的内积空间$R^3$建立了微分同胚。

连续统力学的研究对象是数学上可用各种各样的物质流形表示的可变形的物体。所谓物质流形$\mathscr{B}$是一个可以赋予整体坐标系的三维有向微分流形。利用在$\Phi$上的笛氏坐标系$(x^i)$我们可认为在$\mathscr{B}$上的整体坐标系给出了从$\mathscr{B}$到$\Phi$的一个（保持定向的）微分同胚

$$\chi:\ \mathscr{B}\to R^3\overset{(x^i)}{\longleftrightarrow}\Phi. \tag{10.1.3}$$

这样的微分同胚称为$\mathscr{B}$的一个**构形**。为了说明物体$\mathscr{B}$的一个构形，我们可以指定由每一个物质点$X\in\mathscr{B}$所占据的位置$\mathbf{x}=\chi(X)\in\Phi$的坐标$(x^i)$，因此，有时也形象地称构形是物体$\mathscr{B}$在$\Phi$中占据的位置$\mathbf{x}$的整体。

一族具有单个参变数$t$的构形$\chi_t$，$t\in R$称为物体$\mathscr{B}$的运动，这里$t$表示时间。如果我们选定某一个特定的构形$\kappa$，通过比较$\kappa$和$\chi$来描述物体的运动，这样做有时是方便的。这个特定的构形$\kappa$叫做**参考构形**。如果用$(X^A)$表示在$\kappa(X)$的笛氏坐标，即

$$\kappa:\ \mathscr{B}\to R^3,\ \kappa(X)=(X^A)=(X^A(X)), \tag{10.1.4}$$

$(X^A(X))$称为点$X$的参考坐标。

一般地，任一构形都可用从$\kappa$到$\chi$的一个坐标变换来表示

$$\phi=\chi\cdot\kappa^{-1}:\kappa(\mathscr{B})\to\chi(\mathscr{B}),\ x^i=x^i(X^A),\quad i=1,2,3, \tag{10.1.5}$$

映射$\phi$称为从构形$\kappa$到构形$\chi$的变形。$x^i=x^i(X^A)$，$i=1,2,3$是变

形函数。因此，相对于一个固定的参考构形κ，$\mathscr{B}$的运动也可以表示成具有单个参变数 $t$ 的一族变形

$$\phi_t = \chi_t \cdot \kappa^{-1}: \kappa(\mathscr{B}) \to \chi_t(\mathscr{B}), \quad x^i = x^i(X^A, t). \tag{10.1.6}$$

从(10.1.5)式看到，在变形$\phi$中，$\kappa(\mathscr{B})$的坐标曲线$X^A$被映射成$\chi(\mathscr{B})$中带有坐标为$x^i = x^i(X^A)$的一条曲线，这条曲线的切向量是

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^A}\mathbf{e}_i = [\mathrm{grad}\boldsymbol{\phi}]\mathbf{e}_A \equiv \mathbf{F}\mathbf{e}_A. \tag{10.1.7}$$

我们把由上式定义的线性切映射场

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}): T \to T, \quad \mathbf{X} \in \kappa(\mathscr{B}) \tag{10.1.8}$$

称为变形梯度场，上式中$T$表示物理空间的切空间。从(10.1.7)知$\mathbf{F}$ 有下面的并矢形式

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x^i}{\partial X^A}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^A. \tag{10.1.9}$$

这里$\mathbf{e}^A$是$\mathbf{e}_A$的对偶基（当$\mathbf{e}_A$是笛卡尔直角坐标系的基——单位正交基时，$\mathbf{e}^A$和$\mathbf{e}_A$实际上是重合的）。

物体$\mathscr{B}$直到时刻 $t$ 的运动

$$\boldsymbol{\phi}_s: x^i = x^i(X^A, s), \quad -\infty < s \leqslant t \tag{10.1.10}$$

称为物体$\mathscr{B}$的运动历史，而

$$\mathbf{F}_\kappa^t(\mathbf{X}, s) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, s)}{\partial \mathbf{X}}, \quad -\infty < s \leqslant t \tag{10.1.11}$$

称为变形梯度历史，上式中的上标 $t$ 表示当前时刻为 $t$，下标κ表示以构形κ为参考构形。

我们知道，不同的连续介质在同样的外载荷作用下的力学反应随材料而异。因此，需要引进刻划材料性质的所谓“本构关系”。本构关系是材料性质从经验加以抽象化的数学表现，每个本构关系都定义了一种理想材料。为了保证理论的正确性，建立本构关系要遵循一定的正确的原理，例如

（一） **确定性原理**：材料在时刻 $t$ 的行为由物体在该时刻以前的全部运动历史所确定。

（二） **局部作用原理**：物体典型点$X$在时刻 $t$ 的行为只由该点任意小邻域的运动历史所确定。

（三） **坐标不变性原理**：本构关系与坐标系无关（采用张量记法或抽象记法就自然满足）。

（四） **客观性原理**：本构关系与持有不同时钟和进行不同运动的观察者无关。或者说，本构关系对于作刚性运动的参考标架具有不变性（因而也叫标架无差异原理）。

不同的作者还提出过其它一些不同的原理。我们下面仅以应力和运动的关系为例作一些讨论。依据确定性原理和局部作用原理，典型点$X$ 在时刻 $t$ 的应力应是该点的邻域从无限远过去到现在的运动历史的泛函，称为**本构泛函**。为使讨论简单化，我们只限于讨论Noll称为**简单物质**的一类理想物质。对于简单物质，运动的历史的影响只通过变形梯度的历史来表示。因此，简单物质的本构关系一般地可写成

$$\mathbf{T}(X,t)=G_{\kappa}\left(\mathbf{F}_{\kappa}^{t}(\mathbf{X},s)\right)\equiv G_{\kappa}(\mathbf{F}_{\kappa}^{t}),\quad -\infty<s\leqslant t,\qquad(10.1.12)$$

$G_{\kappa}$是以$\mathbf{X},s$ 为参数的函数$\mathbf{F}_{\kappa}^{t}$的泛函。当然，为了满足客观性原理，(10.1.12)中的泛函 $G_{\kappa}$的形式还要受到限制，这里就不再详细讨论了。除了极少介质外，大多数物质属于简单物质。后面，为了简化，我们还进一步局限于考虑一种称为“**弹性体**”的更简单的理想模型。这种模型假设 (1) 存在各处应力为零的自然状态，初始构形就取在自然状态上，(2) 材料的力学响应只与相对于自然状态的当前变形状态有关。于是我们取自然状态为参考构形$\kappa$，本构关系将只依赖于当前构形相对于$\kappa$的变形梯度，即

$$\mathbf{T}(X,t)=G_{\kappa}(\mathbf{F}_{\kappa}(\mathbf{X},t)),\qquad(10.1.13)$$

此时应力 $\mathbf{T}$ 仅是 $\mathbf{F}_{\kappa}(\mathbf{X},t)$ 的函数，称为本构函数。在§10.1,

§10.2我们仍一般地讨论简单物质。

既然参考构形 $\kappa$ 是可以任意选定的，我们考虑从一个参考构形$\kappa_1$到另一个参考构形$\kappa_2$的变换。设$\mathbf{X}_1$和 $\mathbf{X}_2$分别是粒子$X$在参考构形$\kappa_1$和$\kappa_2$上的位置

$$\mathbf{X}_1=\kappa_1(X), \quad \mathbf{X}_2=\kappa_2(X), \tag{10.1.14}$$

由此我们得到

$$\mathbf{X}_2=\kappa_2(\kappa_1^{-1}(\mathbf{X}_1))\equiv\lambda(\mathbf{X}_1). \tag{10.1.15}$$

关系式

$$\mathbf{P}=\frac{\partial\lambda(\mathbf{X}_1)}{\partial\mathbf{X}_1}=\frac{\partial\mathbf{X}_2}{\partial\mathbf{X}_1}. \tag{10.1.16}$$

给出了由参考构形$\kappa_1$到参考构形 $\kappa_2$的变形梯度。分别对应于参考构形$\kappa_1$和$\kappa_2$，运动(10.1.6)可以有两种表示：

$$\mathbf{x}=\chi_{\kappa_1}(\mathbf{X}_1,t)=\chi_{\kappa_2}(\mathbf{X}_2,t). \tag{10.1.17}$$

运动的变形梯度分别是

$$\mathbf{F}_1=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}_1}, \qquad \mathbf{F}_2=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}_2}. \tag{10.1.18}$$

于是在参考构形的变换下，变形梯度的变换公式是

$$\mathbf{F}_1=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}_1}=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}_2}\ \frac{\partial\mathbf{X}_2}{\partial\mathbf{X}_1}=\mathbf{F}_2\mathbf{P}. \tag{10.1.19}$$

我们用关系式

$$G_{\kappa_1}(\mathbf{F}_1^t)=G_{\kappa_1}(\mathbf{F}_2^t\mathbf{P})\equiv G_{\kappa_2}(\mathbf{F}_2^t) \tag{10.1.20}$$

来定义一个新的泛函 $G_{\kappa_2}$，它是以 $\kappa_2$ 为参考构形的本构泛函。于是本构关系式(10.1.12)变成

$$\mathbf{T}(\mathbf{X},t)=G_{\kappa_2}(\mathbf{F}_2^t). \tag{10.1.21}$$

这表明某一种物质如果对于一个参考构形是简单物质，那么对于任意的参考构形也是简单物质，即简单物质的定义是与参考构形的选择无关的。然而，本构泛函 $G_{\kappa_1}$ 和 $G_{\kappa_2}$ 的形式一般地是不同的，(10.1.20)式给出本构泛函随参考构形 $\kappa$ 的变换而改变的变

换规律。

## §10.2 物质的对称性

现在考察物质点$X$的两个运动，假设它们在两个参考构形$\kappa_1$和$\kappa_2$上给出的变形梯度历史可用同一个函数$\mathbf{F}^t=\mathbf{F}^t_1=\mathbf{F}^t_2$来表示，并且假定简单物质对这两个运动的历史给出完全相同的应力，即

$$\mathbf{T}(X,t)=\mathcal{G}_{\kappa_1}(\mathbf{F}^t)=\mathcal{G}_{\kappa_2}(\mathbf{F}^t). \qquad (10.2.1)$$

由(10.1.20)和(10.2.1)式我们得到

$$\mathcal{G}_{\kappa}(\mathbf{F}^t\mathbf{H})=\mathcal{G}_{\kappa}(\mathbf{F}^t), \qquad (10.2.2)$$

这里已将下标$\kappa_1$换成$\kappa$，且$\mathbf{H}$表示从$\kappa_1$到这个特定的$\kappa_2$的变形梯度。如果对于一切变形梯度历史$\mathbf{F}^t$，(10.2.2)式都成立，这说明从参考构形$\kappa_1$到参考构形$\kappa_2$的变换$\mathbf{H}$对应力没有任何影响。因此，不能通过观测应力来确定这种变换的存在。我们把这样的构形$\kappa_1$和$\kappa_2$称为是**"同格的"**。应该注意等式(10.1.20)和(10.2.1)的意义完全不同，前者是对同一个运动历史相对于任意两个参考构形的本构泛函$\mathcal{G}_{\kappa_1}$和$\mathcal{G}_{\kappa_2}$之间的恒等式；后者中同一个函数$\mathbf{F}^t$代表相对于两个参考构形的两个不同的运动历史，等式仅对特定的$\kappa_1$和$\kappa_2$才成立。

下面证明，满足关系式(10.2.2)的$\mathbf{H}$的集合$\mathscr{G}$构成一个群，群的乘法运算就是张量乘法。首先，设$\mathbf{H}_1$、$\mathbf{H}_2\in\mathscr{G}$，两次使用(10.2.2)式得到

$$\mathcal{G}_{\kappa}(\mathbf{F}^t\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2)=\mathcal{G}_{\kappa}(\mathbf{F}^t\mathbf{H}_1)=\mathcal{G}_{\kappa}(\mathbf{F}^t), \qquad (10.2.3)$$

即$\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2\in\mathscr{G}$。其次，如果$\mathbf{H}_1$，$\mathbf{H}_2$，$\mathbf{H}_3\in\mathscr{G}$，则

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\kappa}(\mathbf{F}^t\mathbf{H}_1(\mathbf{H}_2\mathbf{H}_3))&=\mathcal{G}_{\kappa}(\mathbf{F}^t\mathbf{H}_1)=\mathcal{G}_{\kappa}(\mathbf{F}^t\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2)\\&=\mathcal{G}_{\kappa}(\mathbf{F}^t(\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2)\mathbf{H}_3),\end{aligned} \qquad (10.2.4)$$

这表明群的运算是满足结合律的。显然，恒等变换$\mathbf{I}$起了群的单

位元的作用。最后，由于张量H是非奇异的，逆张量 $\mathbf{H}^{-1}$ 唯一存在。对任意给定的变形梯度历史 $\mathbf{F}^t$，$\bar{\mathbf{F}}^t=\mathbf{F}^t\mathbf{H}^{-1}$ 也是一变形梯度历史，由 $\mathbf{H}\in\mathscr{D}$ 和(10.2.2)式应有

$$G_{\kappa}(\bar{\mathbf{F}}^t)=G_{\kappa}(\bar{\mathbf{F}}^t\mathbf{H}) \tag{10.2.5}$$

即

$$G_{\kappa}(\mathbf{F}^t\mathbf{H}^{-1})=G_{\kappa}(\mathbf{F}^t), \tag{10.2.6}$$

这表明 $\mathbf{H}^{-1}\in\mathscr{D}$ 正是 H 在$\mathscr{D}$中的逆元。这样就证明了满足关系式(10.2.2)的H的集合$\mathscr{D}$的确构成一个群。一般地，这个群与参考构形 $\kappa$ 有关，所以用$\mathscr{D}_{\kappa}$来表示，称为$\kappa$的"**同格群**"。

属于同格群的参考构形的变换H应是一种等容变换。事实上，如果$\mathbf{H}\in\mathscr{D}_{\kappa}$，则$\mathbf{H}^n\in\mathscr{D}_{\kappa}$。将(10.2.2)进行 $n$ 次运算得到

$$G_{\kappa}(\mathbf{F}^t)=G_{\kappa}(\mathbf{F}^t\mathbf{H}^n), \tag{10.2.7}$$

上式对任意正整数 $n$ 都成立。从(10.1.20)知$G_{\kappa}(\mathbf{F}^t\mathbf{H}^n)$表示了从$\kappa$经过$\mathbf{H}^n$变换得到的参考构形$\kappa_n$上的应力。如果特别地取$\mathbf{F}^t=\mathbf{I}$，得到

$$G_{\kappa}(\mathbf{I})=G_{\kappa_n}(\mathbf{I}). \tag{10.2.8}$$

假如通过变换H体积发生了变化，这表明构形 $\kappa_n$ 和 $\kappa$相比较体积呈膨胀或收缩状态。关系式(10.2.8)却表示在经过任意多次的膨胀或收缩得到的构形$\kappa_n$和原来构形 $\kappa$ 上的应力是相同的，这显然是与人们的常识相违背的。因此只能假定

$$|\det\mathbf{H}|=1, \tag{10.2.9}$$

即通过H不发生体积变化。所以，同格群的元必须是等容变形。可以证明保持体积不变的变形梯度的集合也构成一个群，称为"幺模群" $SL(3)$。同格群一定是幺模群的子群：$\mathscr{D}_{\kappa}\subset SL(3)$。

下面讨论正交张量 Q 属于同格群 $\mathscr{D}_{\kappa}$ 的条件。假定正交张量$\mathbf{Q}\in\mathscr{D}_{\kappa}$，则其逆元 $\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}^T$ 也属于 $\mathscr{D}_{\kappa}$。在关系式(10.2.2)中以$\mathbf{Q}^T$代换H，以$\mathbf{QF}^t$代换$\mathbf{F}^t$得到

$$G_{\kappa}(\mathbf{QF}^t\mathbf{Q}^T)=G_{\kappa}(\mathbf{QF}^t). \tag{10.2.10}$$

另一方面，由客观性原理知，对任意的正交张量Q，本构关系(10.1.12)应满足

$$G_K(\mathbf{Q}\mathbf{F}^t)=\mathbf{Q}G_K(\mathbf{F}^t)\mathbf{Q}^T, \tag{10.2.11}$$

比较(10.2.10)和(10.2.11)得到

$$G_K(\mathbf{Q}\mathbf{F}^t\mathbf{Q}^T)=\mathbf{Q}G_K(\mathbf{F}^t)\mathbf{Q}^T. \tag{10.2.12}$$

上式是正交张量Q属于同格群$\mathscr{G}_K$的必要条件。可以证明它还是充分条件。事实上，设对于任意变形梯度历史$\mathbf{F}^t$(10.2.12)成立。以$\mathbf{F}^t\mathbf{Q}^T$代换恒等式(10.2.11)中的$\mathbf{F}^t$得到

$$G_K(\mathbf{Q}\mathbf{F}^t\mathbf{Q}^T)=\mathbf{Q}G_K(\mathbf{F}^t\mathbf{Q}^T)\mathbf{Q}^T, \tag{10.2.13}$$

比较(10.2.12)和(10.2.13)得到

$$G_K(\mathbf{F}^t)=G_K(\mathbf{F}^t\mathbf{Q}^T), \tag{10.2.14}$$

它表明$\mathbf{Q}^T\in\mathscr{G}_K$，即$\mathbf{Q}\in\mathscr{G}_K$。因此正交张量$\mathbf{Q}\in\mathscr{G}_K$的充分必要条件是对于所有的$\mathbf{F}^t$，(10.2.12)式成立。

显然，单位张量$\mathbf{I}$和反演张量$-\mathbf{I}$是正交张量且满足(10.2.12)式，它们必然是一切同格群的元。反演张量$-\mathbf{I}$属于同格群这个事实表明，即使将时空系由右(左)手系变换为左（右）手系，应力不变。如果物质不再具有$\{\mathbf{I},-\mathbf{I}\}$之外的同格群元素，它就是具有最小对称性的物质。这时的同格群$\{\mathbf{I},-\mathbf{I}\}$称为“三斜群”。任何同格群都处于“三斜群”与“幺模群”之间，即有

$$\{\mathbf{I},-\mathbf{I}\}\subseteq\mathscr{G}_K\subseteq SL(3). \tag{10.2.15}$$

根据等容变形的条件(10.2.9)，同格群的元可分为$\det\mathbf{H}=+1$和$\det\mathbf{H}=-1$两种情况。前者的集合$\mathscr{G}_K^+$可组成$\mathscr{G}_K$的一个子群，后者可表示为前者与反演张量的积，即$\mathscr{G}_K^-=-\mathbf{I}\times\mathscr{G}_K^+$，而$\mathscr{G}_K$有下面的直积表示

$$\mathscr{G}_K=\{\mathbf{I},-\mathbf{I}\}\times\mathscr{G}_K^+. \tag{10.2.16}$$

同格群是在一点的物质性质对称性的表现，对称性随着物质变形而变化，因此，同格群是依赖于参考构形的。下面我们探求$\mathscr{G}_K$随K的变化规律。以$\mathbf{F}^t\mathbf{P}^{-1}$代换本构泛函变换律(10.1.20)中的

$\mathbf{F}^t$，得到

$$G_{\kappa_1}(\mathbf{F}^t)=G_{\kappa_2}(\mathbf{F}^t\mathbf{P}^{-1}). \tag{10.2.17}$$

由此可知，将参考构形由$\kappa_1$变换到$\kappa_2$，变形梯度历史则从$\mathbf{F}^t$变换到$\mathbf{F}^t\mathbf{P}^{-1}$，这里$\mathbf{P}^{-1}$是从$\kappa_2$到$\kappa_1$的变形梯度，现在设$\mathbf{H}\in\mathscr{D}_{\kappa_1}$，则有

$$G_{\kappa_2}(\mathbf{F}^t\mathbf{P}^{-1})=G_{\kappa_1}(\mathbf{F}^t)=G_{\kappa_1}(\mathbf{F}^t\mathbf{H})=G_{\kappa_2}(\mathbf{F}^t\mathbf{H}\mathbf{P}^{-1}), \tag{10.2.18}$$

将式中$\mathbf{F}^t$换为$\mathbf{F}^t\mathbf{P}$得到

$$G_{\kappa_2}(\mathbf{F}^t)=G_{\kappa_2}(\mathbf{F}^t\mathbf{P}\mathbf{H}\mathbf{P}^{-1}). \tag{10.2.19}$$

这个关系式表明

$$\mathbf{P}\mathbf{H}\mathbf{P}^{-1}\in\mathscr{D}_{\kappa_2}, \tag{10.2.20}$$

因此，通过参考构形的变换得到的同格群的变换规律为

$$\mathscr{D}_{\kappa_2}=\mathbf{P}\mathscr{D}_{\kappa_1}\mathbf{P}^{-1}. \tag{10.2.21}$$

根据群论的定理可以证明，对于任意非奇异变换 $\mathbf{P}$，有且只有两个满足

$$\mathscr{D}=\mathbf{P}\mathscr{D}\mathbf{P}^{-1} \tag{10.2.22}$$

的不变群存在，这就是三斜群$\{\mathbf{I},-\mathbf{I}\}$和幺模群$SL(3)$。以三斜群为同格群的物质是具有最小对称性的物质，而以幺模群为同格群的物质是具有最大对称性的物质。上式表明，具有这两种极端对称性的物质，而且只有这两种物质，不管怎样变形，其对称性不会增减。

我们可以应用同格群对简单物质进行分类。首先是各向同性的概念，按常识来说，所谓各向同性物质就是物质性质不随方向变化的物质。因此，不论参考构形如何旋转，本构方程都应是一样的。这说明所有正交张量都必须是同格群的元。所有正交张量（这里包括旋转与反演）的集合也构成一个群，称为"**正交群**"，记作$\mathscr{O}$。因此，我们可以定义，如果能够选取某个参考构形$\kappa$，使得关系

$$\mathscr{D}_\kappa\supset\mathscr{O} \tag{10.2.23}$$

成立，此时称物质是“**各向同性的**”。而这个参考构形$\kappa$称为“各向同性物质的**无歪斜状态**”。可以看出，即使对各向同性物质，由于没有选取适当的参考构形，也可以有不满足关系（10.2.23）的情况，此时，对于那个参考构形来说，物质就不再是各向同性的了。而那些无论怎样选取参考构形，关系式（10.2.23）都不成立的物质，我们称作各向异性的。

如果$\kappa_1$是各向同性物质的一个无歪斜状态，即

$$\mathscr{D}_{\kappa_1}\supset\mathscr{O}, \tag{10.2.24}$$

我们从$\kappa_1$出发经过任意正交变换得到参考构形$\kappa_2$，易证$\kappa_2$也是一种无歪斜状态。事实上，任意$\mathbf{Q}\in\mathscr{O}$，设$\mathbf{P}$是从$\kappa_1$到$\kappa_2$的正交变换，即$\mathbf{P}\in\mathscr{O}$，$\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}^T\in\mathscr{O}$，故

$$\mathbf{P}^T\mathbf{Q}\mathbf{P}\in\mathscr{O}\subset\mathscr{D}_{\kappa_1}. \tag{10.2.25}$$

由同格群的变换规律(10.2.21)知

$$\mathbf{Q}=\mathbf{P}(\mathbf{P}^T\mathbf{Q}\mathbf{P})\mathbf{P}^{-1}\in\mathscr{D}_{\kappa_2}, \tag{10.2.26}$$

由$\mathbf{Q}$的任意性知

$$\mathscr{O}\subset\mathscr{D}_{\kappa_2}, \tag{10.2.27}$$

所以$\kappa_2$也是另一种无歪斜状态。

综合(10.2.15)和(10.2.23)式我们知道，各向同性物质的同格群必须满足

$$\mathscr{O}\subset\mathscr{D}_\kappa\subset SL(3). \tag{10.2.28}$$

由群论的知识可以证明，满足上述关系的群只有二种：

$$\mathscr{D}_\kappa=\mathscr{O}\text{或}\mathscr{D}_\kappa=SL(3), \tag{10.2.29}$$

因此，各向同性物质的同格群只可以是正交群或幺模群。

另一种简单物质是“固体”。按常识来讲，固体是一种能抵抗形状变化即非正交变形的物质，因此固体的同格群不应包含非正交变形。严格地说，所谓“固体”是存在着可将其同格群变换为正交群的子群的参考构形$\kappa$的物质

$$\mathscr{D}_\kappa\subset\mathscr{O}. \tag{10.2.30}$$

这样的参考构形κ称为“固体的无歪斜状态”。于是对于固体应有

$$\{1,-1\}\subset\mathscr{D}_{\kappa}\subset\mathscr{O}. \qquad (10.2.31)$$

群论的知识表明,在$\mathscr{O}$内存在12种真子群,它们分别对应于11种各向异性晶体和一种自然界中没有的、人工合成的非各向同性的“横向同性”晶体。对于各向同性固体,由(10.2.23)和(10.2.30)必有

$$\mathscr{D}_{\kappa}=\mathscr{O}, \qquad (10.2.32)$$

这时的构形既属于各向同性的无歪斜状态，也属于固体的无歪斜状态。

按常识来讲，“流体”是只要有剪切应力作用，就可以随意变形的物质，即在体积一定的条件下，无论参考构形如何变化，本构泛函都应是一样的。因此，严格地说，在同格群不受参考构形变换影响的物质中，非固体的物质叫做“流体”。前面已经提到，只有二种群：三斜群和幺模群在任意参考构形的变换下不变。根据条件(10.2.30)同格群为三斜群的物质是固体，因此，流体的同格群是幺模群：

$$\mathscr{D}=SL(3), \qquad (10.2.33)$$

再由条件(10.2.23)知流体是各向同性物质。而各向同性物质只有流体和各向同性固体两种。

除了上面提到的流体和固体以外，对有些物质，不管怎样选取参考构形，它的同格群既不能成为正交群的子群，也不能整个地包含正交群，即对一切κ，有使下列关系成立的场合：

$$\mathscr{D}_{\kappa}\not\subset\mathscr{O}, \qquad (10.2.34)$$

$$\mathscr{D}_{\kappa}\not\supset\mathscr{O}. \qquad (10.2.35)$$

同格群满足条件(10.2.34)和(10.2.35)的物质叫做“流晶”。对于这种物质，按条件(10.2.34)存在属于同格群的伴随形状改变的变形，这是流体的性质；反之，按条件(10.2.35)又有不属于同格群的正交变换存在，这又是各向异性固体的性质。可见，

这种物质的性质部分地是流体的，部分地是固体的。对此种物质，Truesdell 给了“流晶”的名称，C. C. Wang 称之为准流体，Coleman称之为简单液晶。C. C. Wang 和 Coleman 都证明了流晶的存在，前者还把流晶分成14种类型。

上面讨论的按同格群对简单物质的分类可用图 10-1 来表示。图中中心一点表示三斜群 $\{\mathbf{I}, -\mathbf{I}\}$，一切同格群都必须包含着它。最大的圆表示幺模群 $SL(3)$，一切同格群都包含于其中。$SL(3)$ 内的斜线部分为正交群 $\mathscr{O}$。在 $SL(3)$ 和 $\mathscr{O}$ 之间再不存在同格群。$\mathscr{O}$ 之中含有12种同格群，它们对应于12种各向异性固体。流晶的同格群既不包含 $\mathscr{O}$，也不完全被包含于 $\mathscr{O}$ 之中。

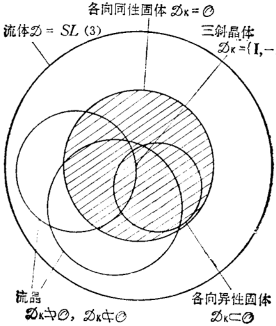



图10-1　简单物质按同格群分类

## §10.3　物体的同样性和均匀性

在上一节我们只着眼于物体中的一个粒子，考察了在单个粒

子的任意小邻域内的本构泛函和同格群，后者反映了物质性质的对称性。如果考虑到物体$\mathscr{B}$的整体，就产生了构成该物体的粒子是否相同的物质这样的问题了。

取物体中的二个粒子$X_1$和$X_2$，设它们的参考构形分别是$\kappa_1$和$\kappa_2$，

$$\mathbf{X}_1=\kappa_1(X_1),\ \mathbf{X}_2=\kappa_2(X_2). \tag{10.3.1}$$

这里已假设所选取的参考构形能使两个粒子的密度相同，即

$$\rho_{\kappa_1}(\mathbf{X}_1)=\rho_{\kappa_2}(\mathbf{X}_2). \tag{10.3.2}$$

又设两个粒子的本构泛函分别是$G_{\kappa_1}(\mathbf{F}^t,\mathbf{X}_1)$和$G_{\kappa_2}(\mathbf{F}^t,\mathbf{X}_2)$。我们考察能适当选取$\kappa_1$和$\kappa_2$使得对一切变形历史$\mathbf{F}^t$都得到同一响应的情况，即

$$G_{\kappa_1}(\mathbf{F}^t,\mathbf{X}_1)=G_{\kappa_2}(\mathbf{F}^t,\mathbf{X}_2). \tag{10.3.3}$$

在这种情况下，我们不能通过应力的观测来区别这两个粒子。因此，我们可以断定这两个粒子是"同样的物质"。这样，如果存在局部参考构形$\kappa_X$和$\kappa_Y$，使得粒子$X$相对于$\kappa_X$的本构泛函与粒子$Y$相对于$\kappa_Y$的本构泛函对一切变形历史$\mathbf{F}^t$都一样，则$X$和$Y$两个粒子称为是**"物质同构的"**。复合映射

$$I(X,Y)=\kappa_Y^{-1}\circ\kappa_X \tag{10.3.4}$$

是从$X$的邻域到$Y$的邻域的一个映射，称为$X$和$Y$的一个物质同构。$\kappa_X$和$\kappa_Y$称为一对**物质同构参考构形**。如果构成物体$\mathscr{B}$的全部粒子每两个一组都是互为物质同构的，则称$\mathscr{B}$为由**"同样的"**(uniform)物质组成的，简称物质上同样的。

我们看到，要使物体是同样的，不需要存在覆盖整个物体$\mathscr{B}$的单一的参考构形。但是，作为特例可以有这样的情况，具有同样性的物体的全部粒子只通过一个参考构形$\kappa$就两两互为物质同构，这时本构泛函$G_\kappa$就与粒子无关。这样的物体被称为是**"均匀的"**(homogeneous)。这时的参考构形$\kappa$称为**均匀构形**。如果物体是均匀的，必定是同样的；可是，同样的物体未必是均匀的。

应该注意，即使是一个均匀物体，可以有均匀构形，也可以有非均匀构形。事实上，设κ是$\mathscr{B}$的一个均匀构形，那么从本构泛函的变换规律（10.1.20）看出，$\mathscr{B}$的另一个构形$\bar{\kappa}$也是均匀的，当且仅当对一切变形历史$\mathbf{F}^t$和一切$\mathbf{X}$，$\mathbf{Y}\in\kappa(\mathscr{B})$，

$$G_{\kappa}(\mathbf{F}^t\mathbf{K}(\mathbf{X}),\ \mathbf{X})=G_{\kappa}(\mathbf{F}^t\mathbf{K}(\mathbf{Y}),\ \mathbf{Y}) \tag{10.3.5}$$

恒成立，这里$\mathbf{K}$表示从κ到$\bar{\kappa}$的变形梯度。比较(10.3.5)和同格群的定义(10.2.2)我们看到，(10.3.5)成立的充分必要条件是对所有$\mathbf{X}$，$\mathbf{Y}\in\kappa(\mathscr{B})$

$$\mathbf{K}(\mathbf{X})\mathbf{K}(\mathbf{Y})^{-1}\in\mathscr{G}_{\kappa}, \tag{10.3.6}$$

这里$\mathscr{G}_{\kappa}$表示§10.2引进的相对于κ的同格群。如果$\mathbf{K}$不满足条件(10.3.6)，那么$\bar{\kappa}$就是$\mathscr{B}$的一个非均匀构形。在这样的一个构形中，物体各点的本构泛函不再是完全一样的了。当然，如果$\mathbf{K}$是$\kappa(\mathscr{B})$上的一个常张量场，即当从κ到$\bar{\kappa}$的变形$\phi=\bar{\kappa}\circ\kappa^{-1}$是与点无关的，那么条件(10.3.6)一定满足。也就是说，从均匀构形经过通常意义下的均匀变形得到的新构形总是均匀构形。然而，如果$\mathscr{G}_{\kappa}$是一个很大的群，那么仍然可能存在某种非均匀变形，它同样满足(10.3.6)式。例如，对于简单流体，$\mathscr{G}=SL(3)$，那么不管$\mathbf{K}$是否常张量场，只要$\mathbf{K}$是等容的，条件(10.3.6)总是成立的，也就是说，与均匀流体的均匀构形等容的所有构形都是均匀构形。

如果给定了$\mathscr{B}$的一个均匀构形，那么我们可以通过验证条件(10.3.6)来确定另一个构形$\bar{\kappa}$是否也是均匀的。然而反过来，如果只是给定了一个非均匀构形$\bar{\kappa}$，例如说相对于$\bar{\kappa}$的本构泛函是

$$\mathbf{T}(X,t)=G_{\bar{\kappa}}(\mathbf{F}^t,\ \mathbf{X}), \tag{10.3.7}$$

我们很难判断由变形$\phi=\kappa\circ\bar{\kappa}^{-1}$产生的另一个构形κ是否均匀的。从本构泛函的变换规律(10.1.20)我们知道，如果κ确实是均匀构形，那么$\phi$的变形梯度$\mathbf{K}$必须对一切$\mathbf{X}$，$\mathbf{Y}\in\bar{\kappa}(\mathscr{B})$和所有变形历史$\mathbf{F}^t$都满足条件

$$G_{\overline{K}}(F^t\overline{K}(X),\ X)=G_{\overline{K}}(F^t\overline{K}(Y),\ Y). \qquad (10.3.8)$$

因为$\overline{\kappa}$是非均匀构形，泛函$G_{\overline{K}}$的表达式是依赖于点的，即一般地$G_{\overline{K}}(\cdot,\ X)$和$G_{\overline{K}}(\cdot,\ Y)$的形式是不一样的。因此，我们很难从(10.3.8)得到类似于(10.3.6)那样比较简单的结果。如果(10.3.8)没有解(不存在满足(10.3.8)的$\overline{K}$)，那么$\mathscr{B}$将是一个非均匀的物体。对这样的物体，所有的构形都是非均匀的。

同样的但非均匀的物体可以看成对应于物理上具有"位错"或"缺陷"的物体。我们回过头来考察一下关系式(10.3.3)。为了使在$\kappa_1$与$\kappa_2$不相同时粒子$X_1$和$X_2$有相同的本构响应，首先必须给$X_2$进行不同于$X_1$的变形。一般来说，要使同样的、但不均匀的物体的各个粒子有相同的响应，必须分别给各个粒子以不同的变形。为此，连续连接的物体被分割成许多碎块，必须给各个碎块以适当的变形。这样的结果，使得物体再也不可能连接成连续介质了。这种情况，和在前面讨论过的含有"位错"或"缺陷"的物质的非协调变形是完全类似的。从本章前三节的讨论我们已经看到，根据理性力学的观点，物质的对称性、同样性和均匀性的概念都是从对本构响应的研究引进的。同样地，对与连续分布位错对应的非均匀性的研究也应从与本构响应相联系的物质结构来考察，这就是我们下面要引进的物质切丛和物质连络的概念。

## §10.4 物质上同样的光滑弹性体

为简单起见，从本节起我们只讨论弹性体。当然整个讨论可以很自然地推广到简单物质。在§10.1中我们已经定义，物体$\mathscr{B}$的一个构形是从$\mathscr{B}$到物理空间$\Phi$的一个保持定向的微分同胚

$$X:\ \mathscr{B}\to\Phi, \qquad (10.4.1)$$

类似地，物体点$X\in\mathscr{B}$的一个**局部构形**是指从切空间$\mathscr{B}_X$到物理切空间$T$的一个保持定向的微分同胚：

$$\mu_X: \mathscr{B}_X \to T, \tag{10.4.2}$$

当然，微分同胚X的导出线性切映射$X_{*X}$也是$X$的一个局部构形，而且，对给定的$X$点，任一局部构形$\mu_X$都可理解成某个构形X的导出线性切映射，即

$$\mu_X = X_{*X}. \tag{10.4.3}$$

然而，一个在$\mathscr{B}$上给定的局部构形场μ（即对每一点$X \in \mathscr{B}$，μ的值是$X$点的局部构形）不一定是某个构形的导出切映射场（梯度），除非它满足一定的相容条件。

如果对$\mathscr{B}$的每个构形X，在X($X$)点的应力张量T由在$X$的导出局部构形$X_{*X}$唯一确定：

$$\mathbf{T} = G(X_{*X},\ X), \tag{10.4.4}$$

则$X$称为$\mathscr{B}$的弹性点。$G$现在只是$X_{*X}$的函数，称为本构函数。如果$\mathscr{B}$的所有点都是弹性点，那么$\mathscr{B}$称为弹性体。自然，本构方程(10.4.4)还应满足客观性原理，这意味着对$G$的形式要加上某些限制，这里就不再详细讨论了。

现在，我们选定某个点$X$的一个局部构形$\nu_X$作为局部参考构形，那么，$X$的任一局部构形$\mu_X$都可以表成$\nu_X$和从$\nu_X$到$\mu_X$的变形梯度$\mathbf{F} = \mu_X \circ \nu_X^{-1}$的复合

$$\mu_X = \mathbf{F} \circ \nu_X. \tag{10.4.5}$$

因为在给定$\nu_X$之后，$\mu_X$和F可通过上式建立起1-1对应，因此，本构关系(10.4.4)可改写成

$$\mathbf{T} = H_{\nu_X}(\mathbf{F},\ X), \tag{10.4.6}$$

$H_{\nu_X}$称为**相对于$\nu_X$的响应函数**，一般而言，它是依赖于$\nu_X$和$X$的，在这里我们已加注下标$\nu_X$和把$X$列入自变量中以强调这种依赖性。从(10.4.5)我们看到$G$和$H_{\nu_X}$的关系是：

$$H_{\nu_X}(\mu_X \circ \nu_X^{-1}, X) = G(\mu_X, X). \tag{10.4.7}$$

由§10.2我们知道，如果存在$\mathscr{B}$的一个参考构形κ使得相对于导出局部参考构形$\kappa_*$的响应函数在整个$\mathscr{B}$上与点无关，这时$\mathscr{B}$称为

均匀的。满足这样的条件的参考构形 $\kappa$ 称为均匀构形。如果$\mathscr{B}$是非均匀体，那么它不具有任何均匀构形，相对于任一参考构形的响应函数都必须依赖于位置$X$了。为了能用上一章介绍的数学工具，我们考虑一类被称为物质上同样的光滑弹性体的非均匀体。我们假定它的响应函数满足下面的物质同样性和光滑性的两个基本条件：

（1） 物质同样性要求：从§10.3我们已经知道，物体$\mathscr{B}$称为物质上同样的，如果它的所有粒子每两个一组都是物质同构的。于是，对弹性体而言，对任意的 $X$ 和 $Y\in\mathscr{B}$，都存在物质同构$I(X,Y)$

$$I(X,Y):\ \mathscr{B}_X\to\mathscr{B}_Y, \tag{10.4.8}$$

使得对在$Y$的所有局部构形$\boldsymbol{\eta}_Y$都有

$$G(\boldsymbol{\eta}_Y\circ I(X,Y),X)=G(\boldsymbol{\eta}_Y,Y). \tag{10.4.9}$$

由(10.4.7)我们有下面等价的叙述：弹性体$\mathscr{B}$称为物质上同样的，如果对任意的$X$和$Y\in\mathscr{B}$，都存在局部参考构形$\mathbf{v}_X$ 和 $\mathbf{v}_Y$，使得在$X$点相对于$\mathbf{v}_X$的响应函数$H_{\mathbf{v}_X}(\mathbf{F},X)$和在$Y$点相对于$\mathbf{v}_Y$的响应函数$H_{\mathbf{v}_Y}(\mathbf{F},Y)$对一切变形梯度$\mathbf{F}$都是一样的：

$$H_{\mathbf{v}_X}(\mathbf{F},X)=H_{\mathbf{v}_Y}(\mathbf{F},Y). \tag{10.4.10}$$

映射$I(X,Y)$，

$$I(X,Y)\equiv\mathbf{v}_Y^{-1}\circ\mathbf{v}_X \tag{10.4.11}$$

是从$X$到$Y$的一个物质同构。按物理解释，一个物体是物质上同样的，至少就物质的力学响应而言，它是仅由同一种物质组成的。我们还称满足条件(10.4.10)的局部参考构形$\mathbf{v}_X$ 和 $\mathbf{v}_Y$为$X$和$Y$的一对物质同构参考构形。

现在，令$\mathscr{B}$是满足上述条件的物质上同样的弹性体，显然，我们可以把物质同构参考构形的概念推广到$\mathscr{B}$中多于两个点的某个点集上去。特别地，设$U$是$\mathscr{B}$的一个子物体，$\mathbf{v}$ 是在 $U$ 上的一个局部参考构形场。那么，$\mathbf{v}$ 称为 $U$ 的一个物质参考构形场，如

果$\mathbf{v}$在$U$上任意两点$X$和$Y$的值 $\mathbf{v}_X$ 和 $\mathbf{v}_Y$都是一对物质同构参考构形。于是，一个弹性体$\mathscr{B}$是物质上同样的，当且仅当它可以被赋予一个整体的物质参考构形场。

$U$的物质参考构形场不是唯一的。因为从（10.4.11）我们知道，$U$的一个局部参考构形场 $\mathbf{v}$ 是物质参考构形场，当且仅当对所有$X$，$Y\in U$，由$\mathbf{v}$在$X$和$Y$的值组成的复合映射 $\mathbf{v}_Y^{-1}\circ\mathbf{v}_X$ 是从$X$到$Y$的物质同构。于是，$U$的一个物质参考构形场可以如下给出：设$\mathbf{v}_X$是$U$的一个固定点 $X\in U$ 的任意固定的一个局部参考构形，$I(X,Y)$是从$X$到$U$上任意一点$Y\in U$ 的任意选定的一个物质同构（由物质同样性，这样的物质同构一定存在），那么

$$\mathbf{v}_Y\equiv\mathbf{v}_X\circ I(X,Y)^{-1},\qquad Y\in U \tag{10.4.12}$$

给出$U$上的一个物质参考构形场。由此可见，这样的物质参考构形场的建立可以有很大的任意性。在上面的定义中，我们未要求$\mathbf{v}$是$U$的某个参考构形的梯度。事实上，$\mathbf{v}$甚至不必是光滑的。如果$\mathbf{v}$是光滑的，那么称$\mathbf{v}$是$U$上的一个**物质卡**，记为（$U$,$\mathbf{v}$）。由于光滑性仅是局部的性质，我们可以用下述条件来描述本构响应的光滑性。

（2） **光滑性要求**：对每个$X\in\mathscr{B}$，总存在$X$的一个邻域$U\ni X$，在$U$上可赋予一个物质卡。

满足上述两个基本要求的弹性体叫做**物质上同样的光滑弹性体**。它就是我们后面讨论的对象。按物理解释，这样的弹性体是由具有相同的力学响应的同一种物质组成的，而且力学响应在物体上是光滑分布的。

尽管物体$\mathscr{B}$的一个子物体$U$上的物质参考构形场 $\mathbf{v}$ 总可以按多种方法扩展成$\mathscr{B}$的整体物质参考构形场（由于$\mathscr{B}$满足物质同样性要求），但是，$U$的一个物质卡一般地不一定能扩展成物体$\mathscr{B}$的**整体物质卡**，因为光滑性条件是严格局部的。一般而言，一个物质上同样的光滑弹性体不必具有一个整体物质卡。整体物质卡

的不存在使我们不得不引进类似于微分流形的坐标图集那样的物质图集．下面我们解释一下这一概念．

假设$U$和$\bar{U}$是$\mathscr{B}$的两个子物体，$(U,\mathrm{v})$是$U$上的一个物质卡，而$(\bar{U},\bar{\mathrm{v}})$是$\bar{U}$上的一个物质卡．我们称$(U,\nu)$和$(\bar{U},\bar{\mathrm{v}})$是相容的，如果在$U$和$\bar{U}$的公共点上它们相应的相对响应函数$H_{\mathrm{v}}$和$H_{\bar{\mathrm{v}}}$是一样的．上面的定义已经隐含，如果$U$和$\bar{U}$不相交，那么它们上面的物质卡总被认为是彼此相容的．假设子物体$U$和$\bar{U}$相交，那么显然，$(U,\mathrm{v})$和$(\bar{U},\bar{\mathrm{v}})$是相容的，当且仅当对任一点$X\in U\cap\bar{U}$（也就是说对所有点$X\in U\cap\bar{U}$）都有

$$\bar{\mathrm{v}}_X\circ\mathrm{v}_X^{-1}\in\mathscr{D}_{\mathrm{v}_X},\tag{10.4.13}$$

这里$\mathscr{D}_{\mathrm{v}_X}$是在§10.2定义的在$X$点相对于局部参考构形$\mathrm{v}$的同格群．

一个由物体$\mathscr{B}$的彼此相容的物质卡组成的最大集合

$$\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\mathrm{v}_\alpha),\ \alpha\in I\}\tag{10.4.14}$$

称为物体$\mathscr{B}$的**物质图集**．这里$I$是一个指标集合，$(U_\alpha,\mathrm{v}_\alpha)$表示子物体$U_\alpha$上的物质卡．由极大性和前面提及的光滑性条件可知，集合$\{U_\alpha,\alpha\in I\}$必定构成物体$\mathscr{B}$的一个开覆盖

$$\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha=\mathscr{B}.\tag{10.4.15}$$

我们可以证明，对于物质上同样的光滑弹性体，这样的物质图集是存在的．事实上，令$\{U_\beta,\beta\in J\}$是$\mathscr{B}$的一个开覆盖，以致每个$U_\beta$都可被赋予一个物质卡$(U_\beta,\mu_\beta)$．由物质上同样的光滑弹性体的光滑性条件(2)，这样的开覆盖总是存在的．现在，我们选定一个特殊点$X\in\mathscr{B}$，而且对每个$\beta\in J$也选定一个特殊点$X_\beta\in U_\beta$．令$\mathrm{v}$是$\mathscr{B}$在$X$处的一个局部参考构形，$I(X,X_\beta)$是从$X$到$X_\beta$的物质同构，于是对任意的$Y\in U_\beta$，令

$$\mathrm{v}_\beta(Y)=\mathrm{v}\circ I(X,X_\beta)^{-1}\circ\mu_\beta(X_\beta)^{-1}\circ\mu_\beta(Y),\tag{10.4.16}$$

由于$\mu_\beta$对$Y$的光滑性知$(U_\beta,\mathrm{v}_\beta)$也是$U_\beta$的一个物质卡．所有这样

的物质卡$(U_\beta, \mathsf{v}_\beta)$，$\beta\in J$是彼此相容的。事实上，对任意的$\beta,\bar\beta\in J$，$Y\in U_\beta\cap U_{\bar\beta}$我们有

$$H_{\mathsf{v}_\beta}(\mathsf{F}, Y)=H_{\mathsf{v}_\beta}(\mathsf{F}, X_\beta)=G(\mathsf{F}\circ\mathsf{v}_\beta(X_\beta),\ X_\beta)$$
$$=G(\mathsf{F}\circ\mathsf{v}\circ I(X, X_\beta)^{-1}, X_\beta)=G(\mathsf{F}\circ\mathsf{v}, X)=H_{\mathsf{v}}(\mathsf{F}, X) \tag{10.4.17}$$

对任意$\mathsf{F}$都成立。上式中第一个等式是因为$\mathsf{v}_\beta$是$U_\beta$的物质卡，第二个等式和最后一个等式应用了(10.4.7)式，第三个等式来自(10.4.16)，而第四个等式来自(10.4.9)式。同样地我们有

$$H_{\mathsf{v}_{\bar\beta}}(\mathsf{F}, Y)=H_{\mathsf{v}}(\mathsf{F}, X). \tag{10.4.18}$$

于是，对一切变形梯度$\mathsf{F}$均有

$$H_{\mathsf{v}_\beta}(\mathsf{F}, Y)=H_{\mathsf{v}_{\bar\beta}}(\mathsf{F}, Y),\ \forall Y\in U_\beta\cap U_{\bar\beta} \tag{10.4.19}$$

这表明$(U_\beta, \mathsf{v}_\beta)$和$(U_{\bar\beta}, \bar{\mathsf{v}}_{\bar\beta})$是相容的。记

$$\mathscr{A}_0=\{(U_\beta, \mathsf{v}_\beta),\ \beta\in J\}. \tag{10.4.20}$$

最后，我们可按通常的办法把$\mathscr{A}_0$极大化而得到包含$\mathscr{A}_0$的唯一的图集$\mathscr{A}$，这就证明了$\mathscr{B}$的物质图集的存在性。

如果$(U, \mathsf{v})$是$U$的一个物质卡，由(10.4.10)我们看到相对于$\mathsf{v}$的响应函数$H_{\mathsf{v}}$是与点$X\in U$无关的，因此我们可以记

$$H_{\mathsf{v}}(\mathsf{F})\equiv H_{\mathsf{v}_r}(\mathsf{F}, X),\ \forall X\in U \tag{10.4.21}$$

称$H_{\mathsf{v}}$为$U$相对于$\mathsf{v}$的响应函数。(由(10.4.10)看到实际上只要$\mathsf{v}$是$U$上的一个物质参考构形场即$\mathsf{v}$不一定要求是光滑的，(10.4.21)式就成立。)一个物质图集$\mathscr{A}$中的所有物质卡$(U_\alpha, \mathsf{v}_\alpha)$的相容性条件又隐含对所有$\alpha\in I$，相对于$\mathsf{v}_\alpha$的响应函数$H_{\mathsf{v}_\alpha}$是一样的，(参看(10.4.18)式)。于是，我们又可以记

$$H_{\mathscr{A}}(\mathsf{F})\equiv H_{\mathsf{v}_\alpha}(\mathsf{F}),\ \forall\alpha\in I, \tag{10.4.22}$$

且称$H_{\mathscr{A}}$是$\mathscr{B}$相对于物质图集$\mathscr{A}$的响应函数。物质图集$\mathscr{A}$的极大性条件隐含：$\mathscr{B}$的二个图集$\mathscr{A}_1$和$\mathscr{A}_2$是同样的，当且仅当

$$H_{\mathscr{A}_1}(\mathsf{F})=H_{\mathscr{A}_2}(\mathsf{F}). \tag{10.4.23}$$

因此，物体$\mathscr{B}$的每个物质图集$\mathscr{A}$都由$\mathscr{B}$的一个特殊的相对响应

函数$H_{\mathscr{A}}$所表征。也就是说，物体$\mathscr{B}$的所有物质图集的集合与物体$\mathscr{B}$的所有相对响应函数的集合之间建立了1-1对应，物体$\mathscr{B}$的物质图集就完全刻划了物体的响应函数的分布。

下面我们讨论一下物质图集和同格群的关系。应用(10.1.20)我们可将(10.4.10)改写成

$$H_{\mathbf{v}_X}(\mathbf{F},X)=H_{\mathbf{v}_X}(\mathbf{F}\circ I(X,Y),Y), \qquad (10.4.24)$$

如果令$X=Y$，即$I(X,X)$表示$X$点到自身的自同构，那么上式变成：

$$H_{\mathbf{v}_X}(\mathbf{F},X)=H_{\mathbf{v}_X}(\mathbf{F}\circ I(X,X),X), \qquad (10.4.25)$$

与(10.2.2)式比较知，物质自同构$I(X,X)$属于在$X$点相对于$\mathbf{v}_X$的同格群$\mathscr{D}_{\mathbf{v}_X}$：

$$I(X,X)\in\mathscr{D}_{\mathbf{v}_X}. \qquad (10.4.26)$$

而且，$\mathscr{D}_{\mathbf{v}_X}$中每个元都可看成是$X$点的一个物质自同构。如果$\mathbf{v}_X$和$\mathbf{v}_Y$是$X$和$Y$的一对物质同构参考构形，从(10.4.10)式又可看出，在$X$点相对于$\mathbf{v}_X$的同格群$\mathscr{D}_{\mathbf{v}_X}$和在$Y$点相对于$\mathbf{v}_Y$的同格群$\mathscr{D}_{\mathbf{v}_Y}$是一样的：

$$\mathscr{D}_{\mathbf{v}_X}=\mathscr{D}_{\mathbf{v}_Y}. \qquad (10.4.27)$$

如果$(U,\mathbf{v})$是$U$的一个物质卡，这时$U$相对于$\mathbf{v}$的响应函数$H_{\mathbf{v}}$与点无关，由(10.4.27)我们看到，$U$中各点相对于$\mathbf{v}$的同格群是完全一样的。因此，我们可以记

$$\mathscr{D}_{\mathbf{v}}\equiv\mathscr{D}_{\mathbf{v}_X}, \quad \forall X\in U, \qquad (10.4.28)$$

且称$\mathscr{D}_{\mathbf{v}}$是$U$相对于$\mathbf{v}$的同格群。由(10.1.20)和(10.2.22)式知，在参考构形变换下，相对响应函数和同格群的变换规律是

$$H_{\bar{\mathbf{v}}}(\mathbf{F})=H_{\mathbf{v}}(\mathbf{FP}), \qquad (10.4.29)$$

和

$$\mathscr{D}_{\bar{\mathbf{v}}}=\mathbf{P}\mathscr{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{P}^{-1}, \qquad (10.4.30)$$

这里$\mathbf{P}$是由下式给出的一个张量

$$\mathbf{P}=\bar{\mathbf{v}}_X\circ\mathbf{v}_X^{-1}, \quad \forall X\in U. \qquad (10.4.31)$$

更进一步，如果$\mathscr{A}$是$\mathscr{B}$的一个物质图集，由(10.4.22)我们可以引进物体$\mathscr{B}$相对于$\mathscr{A}$的同格群$\mathscr{D}_{\mathscr{A}}$的概念：

$$\mathbf{P}\in\mathscr{D}_{\mathscr{A}}\Leftrightarrow H_{\mathscr{A}}(\mathbf{FP})=H_{\mathscr{A}}(\mathbf{F}),\quad \forall\mathbf{F}\in GL(3). \tag{10.4.32}$$

设$\mathscr{A}$是由(10.4.14)给出的$\mathscr{B}$的一个物质图集，我们可以证明，对任意非奇异张量$\mathbf{P}\in GL(3)$，

$$\mathbf{P}\mathscr{A}=\{(U_a,\mathbf{P}\circ\mathbf{v}_a),\ a\in I\} \tag{10.4.33}$$

也是$\mathscr{B}$的一个物质图集。事实上，注意到$\mathbf{P}$的非奇异性，$\mathbf{P}\mathscr{A}$的极大性和相容性易由$\mathscr{A}$的极大性和相容性直接推出。反过来，我们下面证明，任给$\mathscr{B}$的另一个物质图集$\overline{\mathscr{A}}$，总可以找到非奇异张量$\mathbf{P}\in GL(3)$，使得

$$\overline{\mathscr{A}}=\mathbf{P}\mathscr{A}. \tag{10.4.34}$$

为此，我们任意选定一特殊点$X\in\mathscr{B}$。设$(U,\mathbf{v})$和$(\overline{U},\overline{\mathbf{v}})$分别是$\mathscr{A}$和$\overline{\mathscr{A}}$中包含$X$点的物质卡：

$$X\in U\cap\overline{U}, \tag{10.4.35}$$

我们断言张量

$$\mathbf{P}=\overline{\mathbf{v}}_X\circ\mathbf{v}_X^{-1}\in GL(3) \tag{10.4.36}$$

将满足(10.4.34)式。因为由(10.4.22)和(10.4.21)我们有

$$H_{\overline{\mathscr{A}}}(\mathbf{F})=H(\mathbf{F}\overline{\mathbf{v}})=H_{\overline{\mathbf{v}}_X}(\mathbf{F},X) \tag{10.4.37}$$

和

$$H_{\mathbf{P}\mathscr{A}}(\mathbf{F})=H_{\mathbf{P}\mathbf{v}}(\mathbf{F})=H_{\mathbf{P}\mathbf{v}_X}(\mathbf{F},X), \tag{10.4.38}$$

由(10.4.36)知上面两式最右端彼此相等，故

$$H_{\overline{\mathscr{A}}}(\mathbf{F})=H_{\mathbf{P}\mathscr{A}}(\mathbf{F}),\ \forall\mathbf{F}\in GL(3). \tag{10.4.39}$$

由(10.4.23)即证明了我们的断言。综合(10.4.33)和(10.4.34)我们知道，如果给定$\mathscr{B}$的一个物质图集$\mathscr{A}$，则(10.4.33)给出了$\mathscr{B}$的所有物质图集，而(10.4.39)给出了$\mathscr{B}$的所有响应函数。当然，对给定的$\mathscr{A}$和$\overline{\mathscr{A}}$，满足(10.4.34)式的非奇异张量不是唯一的。事实上，由(10.4.32)我们看到

$$\mathbf{P}\in\mathscr{D}_{\mathscr{A}}\Leftrightarrow\mathscr{A}=\mathbf{P}\mathscr{A}. \tag{10.4.40}$$

因此，如果$\mathbf{P}$是满足(10.4.34)的一个张量，那么所有其它满足(10.4.34)的张量可由$\mathbf{P}\mathscr{D}_{\mathscr{A}}$给出。

在结束本节之前，我们回顾一下用物质卡对物体进行的分类。一个物质卡($U$,$\mathbf{v}$)称为均匀的，如果$\mathbf{v}$是$U$的一个参考构形$\boldsymbol{\kappa}$的导出线性切映射，即

$$\mathbf{v}_X=\boldsymbol{\kappa}_{*X}, \qquad \forall X\in U, \tag{10.4.41}$$

这时，$\boldsymbol{\kappa}$称为$U$的均匀构形。如果物体$\mathscr{B}$有一个整体均匀卡，物体$\mathscr{B}$是均匀的。这个定义与前面§10.2引进的概念是一致的。如果对$\mathscr{B}$的每一点$X\in\mathscr{B}$都存在一个覆盖$X$的（局部的）均匀卡，我们称$\mathscr{B}$是**局部均匀**的。自然，这样的均匀物质卡不必定义在整个$\mathscr{B}$上。如果它是定义在整个$\mathscr{B}$上的，那么$\mathscr{B}$就是前面提到的均匀体了。于是我们有下面的关系：

均匀体⇒局部均匀体⇒物质上同样的光滑体。一般而言，箭头是不能倒过来的。不是均匀体的物体叫非均匀体。它可以是局部均匀体，也可以是物质上同样的光滑体，甚至还可以是非光滑的。为了应用数学工具，我们局限于讨论光滑体。在本节我们已经看到，对物质上同样的光滑弹性体可以赋予一个类似于坐标图集那样的物质图集，它是与物体的相对响应函数1-1对应的。当然，这个图集不是直接加于物体流形本身，而是加在它的切空间上的。于是，我们要转入讨论下面的物质切丛的概念。

## §10.5 弹性体的物质切丛

我们先回顾一下，在微分几何中，微分流形$M$的切丛$\mathscr{T}(M)$是由$M$的所有点处的切空间$T_P$的并集构成的

$$\mathscr{T}(M)=\bigcup_{P\in M}T_P. \tag{10.5.1}$$

对于一个物体流形$\mathscr{B}$的切丛$\mathscr{T}(\mathscr{B})$是由它的切空间$\mathscr{B}_X$组成的并

集

$$\mathscr{T}(\mathscr{B})=\bigcup_{X\in\mathscr{B}}\mathscr{B}_X=\bigcup_{\substack{X\in\mathscr{B}\\ v\in\mathscr{B}_X}}(X,v). \qquad (10.5.2)$$

从上式可看到所谓物质流形$\mathscr{B}$的几何切丛是由它的点$X$和在$X$处的切空间上的切向量$v$组成的对子$(X,v)$的集合。当然，还要在这个集合上加上一定的微分结构。然而，$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的结构非常简单，因为$\mathscr{B}$可以由一个整体坐标系，例如

$$\kappa:\ \mathscr{B}\to R^3 \qquad (10.5.3)$$

所覆盖。我们认为$\kappa$是$\mathscr{B}$关于固定参考标架的空间坐标系的一个构形。$\kappa$的导出线性切映射$\kappa_*$引起$\mathscr{B}$的切空间与$R^3$的一个同构场：

$$\kappa_*:\ \mathscr{T}(\mathscr{B})\to\mathscr{B}\times R^3 \qquad (10.5.4)$$

以致对所有$X\in\mathscr{B}$和所有$v\in\mathscr{B}_X$有

$$\kappa_*(X,v)=(X,\kappa_{*X}(v)), \qquad (10.5.5)$$

这里$\kappa_{*X}(v)\in R^3$有时称为$v$的坐标。$\kappa_*$的逆就把$\mathscr{B}\times R^3$的流形结构带回给$\mathscr{T}(\mathscr{B})$。相对于这一流形结构，对子$(\mathscr{B},\kappa_*)$就成了$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的一个整体**丛卡**。

一般地，$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的一个丛卡是指由子物体$U\subset\mathscr{B}$和$U$的切空间与$R^3$的光滑的线性同构场$\nu$组成的对子$(U,\nu)$，这里

$$\nu:\ \mathscr{T}(U)\to U\times R^3. \qquad (10.5.6)$$

所有这样的丛卡的集合组成$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的**丛图集**$\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\nu_\alpha),\alpha\in I\}$。从一个丛卡$(U_\alpha,\nu_\alpha)$到另一个丛卡$(U_\beta,\nu_\beta)$的坐标变换函数可按前面的方法定义：

$$g_{\alpha\beta}=\nu_\alpha\circ\nu_\beta^{-1}, \qquad (10.5.7)$$

它满足条件

$$\left.\begin{aligned}&g_{\alpha\alpha}=1, &&\text{在}U_\alpha\text{上},\\ &g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}^{-1}, &&\text{在}U_\alpha\cap U_\beta\text{上},\\ &g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}=g_{\alpha\gamma}, &&\text{在}U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma\text{上}.\end{aligned}\right\} \qquad (10.5.8)$$

这说明了这些坐标变换是定义在$U_\alpha$和$U_\beta$的交集上的光滑场，它的值是属于$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的结构群——一般线性群$GL(3)$的。

刚才描述的$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的一般性几何结构不是我们所感兴趣的。因为它仅仅基于物质流形的本身而与物质点的响应函数的分布无关。为了表征物体的物质结构，下面引进物体$\mathscr{B}$的物质切丛的概念。

相对于已经安置在物理空间$\Phi$的某个空间坐标系，我们可以认为上节引进的物质卡$(U_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)$是流形$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的一个丛卡，而物质图集$\mathscr{A}$可认为是$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的丛图集的一个子集。我们定义关于**物质图集$\mathscr{A}$的物质切丛**$\mathscr{T}(\mathscr{B},\mathscr{A})$是这样的一个纤维丛，它的丛空间和$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的丛空间一样，但它的丛图集是物质图集$\mathscr{A}$。注意到物质卡的光滑性和物质图集的极大性与相容性，$\mathscr{T}(\mathscr{B},\mathscr{A})$确实是一个纤维丛。因为$\mathscr{A}$的坐标变换$\{g_{\alpha\beta}\}$是在$\mathscr{D}_{\mathscr{A}}$上取值的，$\mathscr{T}(\mathscr{B},\mathscr{A})$的结构群是$\mathscr{D}_{\mathscr{A}}\subset GL(3)$。按纤维丛的术语，我们说从$\mathscr{T}(\mathscr{B})$可推导出$\mathscr{T}(\mathscr{B},\mathscr{A})$，因为$\mathscr{T}(\mathscr{B},\mathscr{A})$的结构群$\mathscr{D}_{\mathscr{A}}$是$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的结构群$GL(3)$的子群。

现在，物质切丛$\mathscr{T}(\mathscr{B},\mathscr{A})$表征了$\mathscr{B}$的物质结构，因为它的图集$\mathscr{A}$完全决定了$\mathscr{B}$的物质点的响应函数的分布。相对于两个物质图集$\mathscr{A}_1$和$\mathscr{A}_2$，从$\mathscr{T}(\mathscr{B},\mathscr{A}_1)$和$\mathscr{T}(\mathscr{B},\mathscr{A}_2)$按纤维丛的意义是同构的。令$\mathbf{P}$是一个张量以致

$$\mathscr{A}_1=\mathbf{P}\mathscr{A}_2, \tag{10.5.9}$$

那么运算

$$\mathbf{P}\mathscr{A}_2\equiv\{(U_\alpha,\mathbf{P}\circ\mathbf{v}_\alpha),\ \alpha\in I_2\} \tag{10.5.10}$$

定义了从$\mathscr{T}(\mathscr{B},\mathscr{A}_1)$和$\mathscr{T}(\mathscr{B},\mathscr{A}_2)$的丛同构。当然在上式中的丛同构不是唯一的。事实上，从(10.4.40)我们有

$$\mathbf{P}\mathscr{A}_2=\bar{\mathbf{P}}\mathscr{A}_2\Leftrightarrow\mathbf{P}\bar{\mathbf{P}}^{-1}\in\mathscr{D}_{\mathscr{A}_2}, \tag{10.5.11}$$

因此，如果(10.5.10)给出了$\mathscr{T}(\mathscr{B},\mathscr{A}_2)$和$\mathscr{T}(\mathscr{B},\mathscr{A}_1)$的一个丛同构，且$\mathbf{P}\bar{\mathbf{P}}^{-1}\in\mathscr{D}_{\mathscr{A}_2}$，则$\bar{\mathbf{P}}\mathscr{A}_2$也是它们的另一个丛同构。

一个纤维丛称为**平凡的丛**，如果它有一个覆盖整个基空间的整体丛卡。例如，一个物质流形$\mathscr{B}$的几何切丛$\mathscr{T}(\mathscr{B})$是平凡的丛。从(10.4.34)我们看到一个物体$\mathscr{B}$的所有物质切丛都是丛同构的，因此，它们或者全是平凡的丛，或者全是非平凡的丛。很清楚，由定义知均匀物体的物质切丛全是平凡的。然而反过来，它的切丛是平凡的丛的物体不必是均匀的。

我们下面给出一些物质上同样的光滑体的物质切丛的例子。

例 1　晶体中位错的连续分布。

为确定起见，我们讨论**三斜晶体**。对该物体的任意两点$X$和$Y$，物质同构$I(X,Y)$是唯一的，因为三斜晶体的同格群——三斜群$\{\mathbf{I},-\mathbf{I}\}$是平凡的（当然，这里已认为反演不属于变形之列。）。我们选定一个参考物体点$X$和在$X$的切空间$\mathscr{B}_X$的一组参考基$\{\mathbf{e}_i(X)\}$，那么，物质同构$I(X,\cdot)$将映射这组基到整个物体的每一点上形成被称作物体的**晶体基**（crystallographic basis）的一个基向量场$\{\mathbf{e}_i(\cdot)\}$。很显然，晶体的物质结构是由它的晶体基决定的。

晶体是均匀的，当且仅当有一个均匀构形，在该构形中晶格基是常向量场。等价地，这一条件意味着晶格基是整体坐标系的自然基。在微分几何中，已经证明，这一条件等价于任一基向基$\mathbf{e}_i$相对于其它基向量$\mathbf{e}_j$的李导数在物体流形上全部恒为零，用括号积来表示，即有

$$[\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j]=0,\quad i,j=1,2,3 \tag{10.5.12}$$

（参见§9.3）。现在设晶体基$\{\mathbf{e}_i\}$不满足条件(10.5.12)，那么晶体是非均匀的，按晶体位错理论的术语，这样的晶体称为有位错的晶体。有位错的晶体的不均匀性可以由一个三阶张量场$\mathbf{S}$来表征，$\mathbf{S}$相对于晶格基的分量可由下式定义：

$$[\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j]=S_{ij}{}^k\mathbf{e}_k, \tag{10.5.13}$$

这里分量$S_{ij}{}^k$是关于下标$i$，$j$反对称的。后面将看到张量$\mathbf{S}$正是这

一物体唯一的物质连络的挠率张量。

因为物质同构场$I(X,\cdot)$是一个整体光滑场，三斜晶体的物质切丛是平凡的，而不管该晶体是否均匀。于是，这个例子很清楚地表明，有平凡的物质切丛的物体不必是均匀体。

**例 2　Möbius 晶体**

为确定起见，考虑由均匀的立方晶体组成的矩形薄带，晶格轴在每一点都平行于矩形带的三条边。现在设想将带子的一端绕纵向轴扭转180°，然后将带子弯曲使首尾两端光滑地连结起来形成通常的 **Möbius 带**（见图10-2）。这样的 Möbius 晶体显然是局部均匀的，因为带子的每一段都可以经过适当的变形而变回原来的状态使得每一点的晶格轴是彼此平行的，这样的构形对晶体来说是均匀的。然而，整个 Möbius 带则不是（整体）均匀的，因为不存在整体的构形使各点处的晶格轴彼此平行。也就是说，Möbius 晶体的所有物质切丛都是非平凡的。

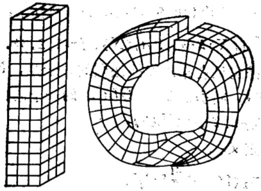


图 10-2

## §10.6　参考标架丛

在上节我们已引进物体$\mathscr{B}$关于物质图集$\mathscr{A}$的物质切丛来描述物质点的响应函数的分布。为了在物质切丛上引进“微分”运

算，需要在物质切丛上引进某种连络，这种连络的存在性是要通过切丛的相伴主丛来说明的。为此，在本节我们先讨论一下与相伴主丛有关的概念。从纤维丛理论我们知道每个纤维丛都有一个**相伴主丛**。例如，几何切丛$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的相伴主丛是标架丛$\mathscr{E}(\mathscr{B})$，而物质切丛$\mathscr{T}(\mathscr{B},\mathscr{A})$的相伴主丛是**参考标架丛**。

我们先定义标架丛$\mathscr{E}(\mathscr{B})$。如果$X\in\mathscr{B}$，一个在$X$点的标架是指在$X$的切空间$\mathscr{B}_X$上的有向基向量组

$$\mathbf{f}(X)=\{\mathbf{f}_1(X),\mathbf{f}_2(X),\mathbf{f}_3(X)\} \tag{10.6.1}$$

我们记在$X$的所有标架的集合为$\mathscr{E}_X$，那么标架丛是$\mathscr{B}$上所有点$X$上的$\mathscr{E}_X$的并集

$$\mathscr{E}(\mathscr{B})=\bigcup_{X\in\mathscr{B}}\mathscr{E}_X. \tag{10.6.2}$$

一般线性群$GL(3)$以自然的方式作用在$\mathscr{E}_X$上成为$\mathscr{E}_X$的一个变换群：如果$\mathbf{A}\in GL(3)$，它的矩阵形式是

$$\mathbf{A}=[A^i{}_j], \tag{10.6.3}$$

且如果$\mathbf{f}(X)\in\mathscr{E}_X$是由(10.6.1)给出的一个标架，我们可以定义

$$R_A\mathbf{f}(X)\overset{\mathrm{df}}{=}\mathbf{f}(X)\mathbf{A}=\{A^i{}_j\mathbf{f}_i(X),\ j=1,2,3\}. \tag{10.6.4}$$

易证这一运算是满足右乘的变换法则的。于是，每个标架$\mathbf{e}(X)=\{\mathbf{e}_i(X)\}\in\mathscr{E}_X$，将引起$\mathscr{E}_X$和$GL(3)$的一个同构：

$$\eta_X:\ \mathscr{E}_X\to GL(3), \tag{10.6.5}$$

它可以由下式定义：

$$\eta_X(\mathbf{f}(X))\overset{\mathrm{df}}{=}[f^i{}_j], \tag{10.6.6}$$

其中$f^i{}_j$是$\{\mathbf{f}_j(X)\}$相对于$\{\mathbf{e}_i(X)\}$的分量，即

$$\mathbf{f}_j(X)=f^i{}_j\mathbf{e}_i(X). \tag{10.6.7}$$

根据(10.6.4)定义的右乘运算$R$，上式意味着对所有$\mathbf{f}(X)\in\mathscr{E}_X$

$$R_{\eta_X(\mathbf{f}(X))}\mathbf{e}(X)=\mathbf{f}(X). \tag{10.6.8}$$

集合$\mathscr{E}_X$称为$\mathscr{E}(\mathscr{B})$在基点$X$的纤维。在同构$\eta_X$下$GL(3)$可看成标架丛$\mathscr{E}(\mathscr{B})$的纤维型，而纤维$\mathscr{E}_X$变成它的一个副本。如同通

常那样我们可以要求集合同构$\eta_X$是微分同构来定义在$\mathscr{E}_X$上的流形结构。关于这个导出的流形结构，$\eta_X$称为由标架$\mathbf{e}(X)$导出的纤维同构。

定义在$\mathscr{B}$的子物体$U\in\mathscr{B}$上的光滑的纤维同构场$\eta$形成$\mathscr{E}(\mathscr{B})$的丛卡$(U,\eta)$，所有这样的丛卡组成的集合形成了$\mathscr{E}(\mathscr{B})$的丛图集。从一个丛卡$(U,\eta)$到另一个丛卡$(\bar{U},\bar{\eta})$的坐标变换是在交集$U\cap\bar{U}$上的光滑场$g$，它是由下式给出的：

$$g_{\eta\bar{\eta}}(X)=\eta_X\circ\bar{\eta}_X^{-1},\qquad X\in U\cap\bar{U}. \tag{10.6.9}$$

$g_{\eta\bar{\eta}}$的值是$GL(3)$中的变换。从(10.6.6)和(10.6.9)我们有

$$[g_{\eta\bar{\eta}}(X)](\mathbf{A})=\eta_X(\bar{\mathbf{e}}(X))\mathbf{A},\qquad \forall\mathbf{A}\in GL(3). \tag{10.6.10}$$

这里$\bar{\mathbf{e}}(X)$是导出纤维同构$\bar{\eta}_X$的标架，上式右边的运算是通常的$GL(3)$中的群的乘法。鉴于(10.6.10)我们可以认为$g_{\eta\bar{\eta}}(X)$是$GL(3)$中的一个元素。因此，$\mathscr{E}(\mathscr{B})$的结构群是$GL(3)$。因为$\mathscr{E}(\mathscr{B})$的纤维型也是$GL(3)$，它和结构群重合。一个满足这样的条件的纤维丛一般叫做主丛。因此，$\mathscr{E}(\mathscr{B})$是一个主丛。我们下面说明$\mathscr{E}(\mathscr{B})$还是切丛$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的相伴主丛。

从上节我们知道$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的丛卡$(U,\mathbf{v})$是由子物体$U$和$U$上的光滑的局部构形场$\mathbf{v}$组成的对子。按下面的办法我们可以建立$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的丛卡$(U,\mathbf{v})$和$\mathscr{E}(\mathscr{B})$的丛卡$(U,\eta)$间的1-1对应：给出$(U,\mathbf{v})$，对任一点$X\in U$，我们令

$$\mathbf{e}_i(X)=\mathbf{v}_X^{-1}(\mathbf{g}_i),\qquad i=1,2,3. \tag{10.6.11}$$

这里$\{\mathbf{g}_i\}$是物理空间$\Phi$中固定的笛卡尔参考标架。那么我们定义$\eta_X$是由标架

$$\mathbf{e}(X)=\{\mathbf{e}_1(X),\mathbf{e}_2(X),\mathbf{e}_3(X)\} \tag{10.6.12}$$

产生的纤维同构，其中$\mathbf{e}_i(X)$是由(10.6.11)给出的。反之，给定$(U,\eta)$，这里对所有$X\in U$，$\eta_X$是由标架$\mathbf{e}(X)$导出的。我们定义

$$\mathbf{v}_X(\mathbf{e}_i(X))=\mathbf{g}_i, \tag{10.6.13}$$

并且线性地将映射$\mathbf{v}_X$扩展到整个切空间$\mathscr{B}_X$上。于是，通过关系(10.6.11)和(10.6.13)，每个$(U,\mathbf{v})$决定唯一的一个$(U,\boldsymbol{\eta})$，反之亦然。

下面我们证明$\mathscr{T}(\mathscr{B})$和$\mathscr{E}(\mathscr{B})$中相应的丛卡的坐标变换是同样的场。令$(U,\mathbf{v})$和$(\bar{U},\bar{\mathbf{v}})$是$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的两个丛卡，而$(U,\boldsymbol{\eta})$和$(\bar{U},\bar{\boldsymbol{\eta}})$是$\mathscr{E}(\mathscr{B})$相应的丛卡。象前面讨论一样，我们设$\boldsymbol{\eta}_X$和$\bar{\boldsymbol{\eta}}_X$分别是由标架$\mathbf{e}(X)$和$\bar{\mathbf{e}}(X)$导出的。那么，根据(10.6.10)式从$\boldsymbol{\eta}_X$到$\bar{\boldsymbol{\eta}}_X$的坐标变换的分量是矩阵

$$g_{\eta\bar{\eta}}(X)=[\bar{e}^i{}_j(X)] \qquad (10.6.14)$$

这里$\bar{e}^i{}_j$是$\{\bar{\mathbf{e}}_j(X)\}$关于标架$\mathbf{e}(X)$的分量。但是，根据(10.5.7)和(10.6.13)，从$\mathbf{v}_X$到$\bar{\mathbf{v}}_X$的坐标变换的分量矩阵也等于$[\bar{e}^i{}_j(X)]$，

$$g_{\mathbf{v}\bar{\mathbf{v}}}(X)=[\bar{e}^i{}_j(X)], \qquad (10.6.15)$$

因此，坐标变换$g_{\mathbf{v}\bar{\mathbf{v}}}$和$g_{\eta\bar{\eta}}$是在交集$U\cap\bar{U}$上的同一个场

$$G_{\eta\bar{\eta}}(X)=G_{\mathbf{v}\bar{\mathbf{v}}}(X), \quad \forall X\in U\cap\bar{U}. \qquad (10.6.16)$$

丛卡$(U,\mathbf{v})$和$(U,\boldsymbol{\eta})$的1-1对应以及它们的坐标变换间的等式(10.6.16)说明$\mathscr{E}(\mathscr{B})$是$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的相伴主丛。

标架丛$\mathscr{E}(\mathscr{B})$和几何切丛$\mathscr{T}(\mathscr{B})$一样仅仅是物体流形的几何结构，它与物质点的响应函数无关。如在上一节已解释过的一样，物体的物质结构可以由物质切丛来表示，或者等价地由它的相伴主丛表示。物质切丛的相伴主丛是参考标架丛。下面解释一下这个概念。

令$\mathscr{A}$是物体$\mathscr{B}$的一个特定的物质图集，$\mathscr{T}(\mathscr{B},\mathscr{A})$是相对$\mathscr{A}$的物质切丛，那么$\mathscr{A}$相应于一个特定的相对响应函数$H_{\mathscr{A}}$。我们说在$X$点的一个标架$\mathbf{e}(X)$是相对于$\mathscr{A}$的一个参考标架，如果相对于由(10.6.13)给定的局部构形$\mathbf{v}_X$的响应函数$H_{\mathbf{v}_X}$与$H_{\mathscr{A}}$重合：

$$H_{\mathbf{v}_X}=H_{\mathscr{A}}. \qquad (10.6.17)$$

这个条件等价于对$\mathscr{A}$中覆盖物质点$X$的某个物质卡$(U_a,\mathbf{v}_a)$

$$e(X)=v_{\alpha,X}^{-1}(g),\tag{10.6.18}$$

这里 $g=\{g_i\}$ 是物理空间$\Phi$中固定的笛卡尔参考坐标标架。我们用$\mathscr{E}_X(\mathscr{A})$表示在$X$点的所有相对于$\mathscr{A}$的参考标架的集合，且令

$$\mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A})=\bigcup_{X\in\mathscr{B}}\mathscr{E}_X(\mathscr{A}),\tag{10.6.19}$$

因为

$$\mathscr{E}_X(\mathscr{A})\subset\mathscr{E}_X,\quad \forall X\in\mathscr{B}\tag{10.6.20}$$

从(10.6.2)和(10.6.19)我们有

$$\mathscr{E}(\mathscr{B},\ \mathscr{A})\subset\mathscr{E}(\mathscr{B}).\tag{10.6.21}$$

现在我们考察一下$\mathscr{E}(\mathscr{B},\ \mathscr{A})$的结构。首先，由(10.6.17)我们看到，在$X$点的标架 $f(X)$ 是相对于$\mathscr{A}$的参考标架，当且仅当从标架$e(X)$到标架$f(X)$的右变换P属于同格群$\mathscr{D}_{\mathscr{A}}$。于是，由$e(X)$导出的纤维同构$\eta_X$局限于$\mathscr{E}_X$的子集$\mathscr{E}_X(\mathscr{A})$时是$\mathscr{E}_X(\mathscr{A})$与$\mathscr{D}_{\mathscr{A}}$的同构：

$$\eta_X|_{\mathscr{E}_X(\mathscr{A})}\equiv\eta_X(\mathscr{A}):\ \mathscr{E}_X(\mathscr{A})\to\mathscr{D}_{\mathscr{A}}.\tag{10.6.22}$$

这一同构建立了$\mathscr{D}_{\mathscr{A}}$作为从$\mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A})$的纤维型。

其次，我们考虑$\mathscr{E}(\mathscr{B},\ \mathscr{A})$的丛卡。因为$\mathscr{A}$是$\mathscr{T}(\mathscr{B})$ 的丛图集的一个子集，它相应于$\mathscr{E}(\mathscr{B})$的丛卡的一个集合，例如是

$$\mathscr{A}'=\{(U_\alpha,\ \eta_\alpha),\ \alpha\in I\},\tag{10.6.23}$$

我们令

$$\mathscr{A}_{\mathscr{E}}\equiv\{(U_\alpha,\eta_\alpha(\mathscr{A})),\ \alpha\in I\},\tag{10.6.24}$$

这里$\eta_\alpha(\mathscr{A})$表示如(10.6.22)所示的$\eta_\alpha$在 $\mathscr{E}(U_\alpha,\mathscr{A})$上的限制，那么$\mathscr{A}_{\mathscr{E}}$是$\mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A})$的丛图集。我们称$\mathscr{A}_{\mathscr{E}}$是$\mathscr{B}$相对于$\mathscr{A}$ 的**参考图集**。称它的元素是$\mathscr{B}$相对于$\mathscr{A}$的**参考卡**。由(10.6.16)我们看到，参考图集$\mathscr{A}_{\mathscr{E}}$的坐标变换和物质图集$\mathscr{A}$的坐标变换是一样的。这一事实表明$\mathscr{D}_{\mathscr{A}}$就是$\mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A})$的结构群。因此$\mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A})$的纤维型和结构群都是 $\mathscr{D}_{\mathscr{A}}$，它是个主丛，而且是$\mathscr{T}(\mathscr{B},\mathscr{A})$的相伴主丛。

下面我们建立参考标架对于物质图集的变化的变换规律．令$\overline{\mathscr{A}}$是$\mathscr{B}$的另一个物质图集，它与$\mathscr{A}$以下式相联系：

$$\overline{\mathscr{A}}=\mathbf{P}\mathscr{A} \tag{10.6.25}$$

这里的运算$\mathbf{P}\mathscr{A}$由(10.5.10)给出．于是，容易证实$\mathbf{f}(X)$是相对于$\overline{\mathscr{A}}$的参考标架，当且仅当由下式给出的$\mathbf{e}(X)$是相对于$\mathscr{A}$的参考标架

$$\mathbf{e}(X)=R_{\mathbf{P}}\mathbf{f}(X), \tag{10.6.26}$$

而且，$\mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A})$和$\mathscr{E}(\mathscr{B},\overline{\mathscr{A}})$的丛空间以下式相联系：

$$\mathscr{E}(\mathscr{B},\overline{\mathscr{A}})=R_{\mathbf{P}^{-1}}\mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A}). \tag{10.6.27}$$

此外，因为每一个标架是关于某一个物质图集的参考标架，$\mathscr{E}(\mathscr{B})$的丛空间是所有参考标架丛的丛空间的并集

$$\mathscr{E}(\mathscr{B})=\bigcup_{\mathscr{A}}\mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A}). \tag{10.6.28}$$

参考图集的变换规律可以按类似方法导出．令$\mathscr{A}_{\mathscr{E}}$是由(10.6.24)给出的参考图集，那么$\overline{\mathscr{A}}_{\mathscr{E}}$由下式给出

$$\overline{\mathscr{A}}=\{(U_\alpha,C_{\mathbf{P}}\circ\eta_\alpha(\mathscr{A})\circ R_{\mathbf{P}}),\ \alpha\in I\}, \tag{10.6.29}$$

这里$C_{\mathbf{P}}$表示$\mathbf{P}$在$GL(3)$中的共轭运算，即

$$C_{\mathbf{P}}(\mathbf{A})=\mathbf{PAP}^{-1},\qquad \forall\mathbf{A}\in GL(3). \tag{10.6.30}$$

应该注意，对任一点$X\in U_\alpha$，$R_{\mathbf{P}}$映射$\mathscr{E}_X$到$\mathscr{E}_X(\mathscr{A})$，那么$\eta_{\alpha,X}$映射$\mathscr{E}_X(\mathscr{A})$到$\mathscr{D}_{\mathscr{A}}$，而且$C_{\mathbf{P}}$最后映射$\mathscr{D}_{\mathscr{A}}$到$\mathscr{D}_{\overline{\mathscr{A}}}$，因此，复合映射$C_{\mathbf{P}}\circ\eta_\alpha(\mathscr{A})\circ R_{\mathbf{P}}$是从$\mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A})$在$U_\alpha$上的一个纤维同构场，故$(U_\alpha,C_{\mathbf{P}}\circ\eta_\alpha(\mathscr{A})\circ R_{\mathbf{P}})$确是$U_\alpha$上的一个丛卡．

因为纤维丛上的丛卡和相伴主丛的丛卡是1-1对应的，纤维丛是平凡的，当且仅当相伴主丛是平凡的．又因为主丛$\mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A})$的丛卡是由条件(10.6.8)表征的，那么$\mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A})$是平凡的，当且仅当$\mathscr{B}$有一个相对于$\mathscr{A}$的整体的光滑的参考标架场$\mathbf{e}$．这样的整体场相应于从$\mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A})$的一个横截面，即$\mathbf{e}$可被认为是满足条件

$$\pi\circ e = id_{\mathscr{B}} \tag{10.6.31}$$

的一个光滑映射：

$$e: \mathscr{B}\to \mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A}), \tag{10.6.32}$$

这里$\pi$是标准的投影映射：

$$\pi: \mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A})\to \mathscr{B}, \tag{10.6.33}$$

对所有$X\in\mathscr{B}$，它将纤维$\mathscr{E}_X(\mathscr{A})$映射到基点$X$。

从上节的例子我们知道物质切丛，因而参考标架丛一般地不必是平凡的。于是，$\mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A})$的整体横截面不一定存在。然而，对每个丛卡$(U,\eta)$，总有由下式定义的$\mathscr{E}(U,\mathscr{A})$的一个标准横截面$e$存在：

$$e(X)=\eta_X^{-1}(1), \quad \forall X\in U. \tag{10.6.34}$$

前面我们已经讲过，由(10.6.8)，$\eta_X$可作为由标架导出的纤维同构。鉴于条件(10.6.34)，我们称$e$是纤维同构场$\eta$的单位截面。局部的单位截面的存在意味着$\mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A})$，由此$\mathscr{T}(\mathscr{B},\mathscr{A})$是局部平凡的。(因此，每个纤维丛是局部平凡的。)

纤维丛的相伴主丛的重要性在于纤维丛上的结构连络可与相伴主丛上的结构连络建立1-1对应。$\mathscr{T}(\mathscr{B},\mathscr{A})$和$\mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A})$上的结构连络就是我们将在下一节讨论的物质连络。

## §10.7 物质连络

我们先回顾一下切丛$\mathscr{T}(\mathscr{B})$上的连络$\mathscr{K}$的概念。切丛$\mathscr{T}(\mathscr{B})$是由$\mathscr{B}$的切空间$\mathscr{B}_X$组成的并集

$$\mathscr{T}(\mathscr{B})=\bigcup_{X\in\mathscr{B}}\mathscr{B}_X. \tag{10.7.1}$$

投影映射

$$\pi: \mathscr{T}(\mathscr{B})\to\mathscr{B} \tag{10.7.2}$$

是由下式定义的

$$\pi(\mathscr{B}_X)=X, \quad \forall X\in\mathscr{B}, \tag{10.7.3}$$

以致

$$\mathscr{B}_X=\pi^{-1}(X), \quad \forall X\in\mathscr{B}. \tag{10.7.4}$$

令$(X,v)$是$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的一个点，我们定义在$(X,v)$的垂直空间$\mathscr{V}_{(X,v)}$（参见(9.4.15)）是

$$\mathscr{V}_{(X,v)}=\mathrm{Ker}\,\pi_{*(X,v)}. \tag{10.7.5}$$

从(10.7.3)可以看出$\mathscr{V}_{(X,v)}$是纤维$\mathscr{B}_X$的切空间。我们定义在$(X,v)$的水平空间（或基准空间）是$\mathscr{T}(\mathscr{B})$在$(X,v)$的切空间$\mathscr{T}(\mathscr{B})_{(X,v)}$的子空间$\mathscr{H}_{(X,v)}$使得$\mathscr{T}(\mathscr{B})_{(X,v)}$可以有下面的直和分解

$$\mathscr{T}(\mathscr{B})_{(X,v)}=\mathscr{V}_{(X,v)}\oplus\mathscr{H}_{(X,v)}. \tag{10.7.6}$$

显然，与垂直空间$\mathscr{V}_{(X,v)}$不同，水平空间$\mathscr{H}_{(X,v)}$不是唯一的。一个水平空间的光滑场称为$\mathscr{T}(\mathscr{B})$上的一个连络。

一个连络将引起沿着$\mathscr{B}$中某一条曲线的平行移动。设曲线是

$$X:\ (a,b)\to\mathscr{B}. \tag{10.7.7}$$

那么，我们说曲线

$$\lambda:\ (a,b)\to\mathscr{T}(\mathscr{B}) \tag{10.7.8}$$

是$X$相对于连络$\mathscr{H}$的水平提升，如果对所有的$t\in(a,b)$，下面两个条件被满足：

$$\pi\circ\lambda(t)=X(t) \tag{10.7.9}$$

和

$$[\lambda(t)]\in\mathscr{H}_{\lambda(t)}. \tag{10.7.10}$$

第一个条件是说对所有的$t$，$\lambda(t)$都属于在$X(t)$的纤维，而第二个条件表明$\lambda$是相对于$\mathscr{H}$的水平曲线。因为曲线$X(t)$是一维的，而且连络是光滑的，通过在$X(t)$的一条纤维中的任一初始点有唯一的水平提升的存在。沿着过$\mathscr{B}_{X(t_0)}$中的初始点的水平提升，我们得到沿着$X(t)$相对于$\mathscr{H}$的平行移动

$$\rho_{t_0,t}:\ \mathscr{B}_{X(t_0)}\to\mathscr{B}_{X(t)}, \quad t\in(a,b) \tag{10.7.11}$$

以致对每一个初始点$(X(t_0),v(t_0))$，曲线

$$\lambda(t)=(X(t),\rho_{t_0,t}\ (v(t_0))),\quad t\in(a,b) \tag{10.7.12}$$

是通过点$(X(t_0),v(t_0))$的水平提升。从$\lambda$关于初始点的唯一性和光滑依赖，对每个$t\in(a,b)$，平行移动$\rho_{t_0,t}$是$\mathscr{B}_{X(t_0)}$和$\mathscr{B}_{X(t)}$的微分同胚。

下面我们建立连络和丛卡的关系。设$(U_a,\mathsf{v}_a)$是前面所述的$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的一个丛卡，那么$\mathsf{v}_a$是$\mathscr{T}(U_a)$与乘积空间$U_a\times R^3$的一个微分同胚，于是它将$\mathscr{T}(U_a)$上的一个连络$\mathscr{H}$带到$U_a\times R^3$上而成为$U_a\times R^3$上的一个连络$\mathscr{H}(a)$。设$X(t)$是$U_a$上的一条光滑曲线，那么沿着$X(t)$关于$\mathscr{H}$的平行移动$\rho_{t_0,t}$与沿着在$U_a\times R^3$上的相应曲线$X(t)$关于$\mathscr{H}(a)$的平行移动$\rho_{t_0,t}\ (a)$之间有关系

$$\rho_{t_0,t}(a)=\mathsf{v}_{a,X(t)}\circ\rho_{t_0,t}\circ\mathsf{v}^{-1}_{a,X(t_0)}, \tag{10.7.13}$$

我们称$\rho_{t_0,t}\ (a)$是相对平行移动。因为$U_a\times R^3$是一个乘积流形，相对平行移动$\rho_{t_0,t}\ (a)$是纤维空间$R^3$的自同构，从(10.7.13)和(10.5.7)知，在丛卡改变时相对平行移动的变换规律是

$$\rho_{t_0,t}\ (\beta)=g_{\beta a}(X(t))\rho_{t_0,t}\ (a)g_{a\beta}(X(t_0)), \tag{10.7.14}$$

这里$g_{a\beta}$是从丛卡$(U_a,\mathsf{v}_a)$到$(U_\beta,\mathsf{v}_\beta)$的坐标变换函数。

现在我们引进结构连络的概念。我们说一个连络$\mathscr{H}$是纤维丛上的**结构连络**，如果沿任一曲线的相对平行移动都属于丛的结构群。变换规律(10.7.14)显示这一条件是与引进相对平行移动的丛卡的选取无关的。事实上，如果$\rho_{t_0,t}\ (a)$属于丛的结构群，由于$g_{\beta a}$和$g_{a\beta}$都是结构群的元素，故它与$\rho_{t_0,t}\ (a)$相乘后得到的$\rho_{t_0,t}\ (\beta)$也属于该结构群。这样定义结构连络的条件对一般的纤维丛都是有意义的。特别地，对于切丛$\mathscr{T}(\mathscr{B})$，它要求沿着任一曲线的相对平行移动是$R^3$的线性自同构，这也就是要求平行移动$\rho_{t_0,t}$是沿曲线的纤维的线性同构，因为纤维同构$\mathsf{v}_{a,X(t)}$和$\mathsf{v}_{a,X(t_0)}$都是线性的。由于这一条件，切丛上的结构连络和经典意义下的仿射连络是一样的。

现在我们可以引进**物质连络**的概念了。我们称物质切丛$\mathscr{T}(\mathscr{B},\mathscr{A})$的一个结构连络是物质连络。因为物质切丛$\mathscr{T}(\mathscr{B},\mathscr{A})$的结构群是同格群$\mathscr{D}_{\mathscr{A}}$，因此，$\mathscr{H}$是物质连络，当且仅当$\mathscr{H}$的相对平行移动是相对于$\mathscr{A}$的物质同构。现在，借助于平行移动$\rho_{t_0,t}$和相对平行移动$\rho_{t_0,t}(\alpha)$的关系（10.7.13），我们看到：$\rho_{t_0,t}(\alpha)$属于$\mathscr{D}_{\mathscr{A}}$，当且仅当$\rho_{t_0,t}$是物质同构。因此，$\mathscr{H}$是物质连络的充分必要条件是所有关于$\mathscr{H}$的平行移动都是物质同构。因为这一条件是与物质卡的选取无关的，物体$\mathscr{B}$的任一物质切丛的结构连络也是所有物质切丛的结构连络。在一般地讨论物质连络的存在性之前，我们先看看上两节作为例子给出的物体的物质连络的一些一般性质。

**例1** 位错在固体晶体中的连续分布。

我们考虑的是三斜晶体，在这个例子中任意两点的物质同构是唯一的——这个同构将一点处的晶格基映射到另一点的晶格基。从上面给出的物质连络的充分必要条件看出，这一同构还必须是沿连结这两点的任意曲线关于物质连络的平行移动。于是，在本例中，物质连络是唯一的，进而，它与所谓晶格向量场族的切空间场重合，后者是相对于晶格基的分量为常数的向量场。当然，这一物质连络是可积的（物质连络的唯一性和可积性是所有固体晶体都具有的性质）。

**例2** Möbius晶体

在本例中晶格基向量场只是局部光滑的，它不能推广成（单值的）整体光滑的。然而，物质连络仍是唯一的和可积的。因为它是局部地唯一的和局部地可积的（连络是一个局部的结构而可积性是一个连络的局部的性质）。

和例1一样，本例中的物质连络局部地与局部晶格基向量场族的切空间场重合。此例与上例的唯一不同是对Möbius晶体$\mathscr{B}$，切丛$\mathscr{T}(\mathscr{B})$没有相对于物质连络的整体的水平横截面。

现在我们转向一般地讨论物质连络的存在性. 在微分几何中，主丛的结构连络的存在性是已有的标准结果. 为了应用这一结果，我们首先建立纤维丛上的结构连络与相伴主丛上的结构连络的关系. 我们用切丛$\mathscr{T}(\mathscr{B})$和它的相伴主丛——线性标架丛$\mathscr{E}(\mathscr{B})$来说明这个过程.

设$\mathscr{H}$是切丛$\mathscr{T}(\mathscr{B})$上的结构连络，我们说明连络$\mathscr{H}$将按一种自然的方法引起相伴主丛$\mathscr{E}(\mathscr{B})$上的结构连络$\widehat{\mathscr{H}}$. 前面已经说过，$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的丛卡和$\mathscr{E}(\mathscr{B})$的丛卡是1-1对应的. 设$(U_a, \nu_a)$和$(U_a, \eta_a)$是$\mathscr{T}(\mathscr{B})$和$\mathscr{E}(\mathscr{B})$的一对相应的丛卡. 令$X(t)$是$U_a$上的一条光滑曲线，那么，如在上面解释过的那样，$\mathscr{H}$引起沿$X(t)$的平行移动$\rho_{t_0,t}$和关于$(U_a, \nu_a)$的相对平行移动$\rho_{t_0,t}(a)$. 由于$\mathscr{H}$是结构连络，所以$\rho_{t_0,t}(a)$属于$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的结构群$GL(3)$.

因为$\mathscr{E}(\mathscr{B})$是$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的相伴主丛，它的结构群也是$GL(3)$，因此我们可以认为$\rho_{t_0,t}(a)$是$\mathscr{E}(\mathscr{B})$的纤维空间$GL(3)$的一族变换，它因而确定了在$U_a \times GL(3)$中的$X(t)$的一族相对水平提升. 于是纤维同构$\eta$把这些水平提升带回$\mathscr{E}(U_a)$而成为$\mathscr{E}(U_a)$中$X(t)$的一族水平提升. 因为我们可以应用这个过程于$U_a$中的任一曲线，在$\mathscr{E}(U_a)$中的水平提升就确定了$\mathscr{E}(U_a)$上的一个唯一的连络$\widehat{\mathscr{H}}$.

现在，将同样的程序应用于各个丛卡，我们可以在每个$\mathscr{E}(U_a)$上定义一个连络. 为了使这些连络相应于$\mathscr{E}(\mathscr{B})$上的一个整体的连络，充分必要的条件是在丛卡变换下，这些相对平行移动满足变换规律(10.7.14). 但是，这个条件是显然满足的，因为由上述的构成方法，相对于$\widehat{\mathscr{H}}$的相对平行移动和相对于$\mathscr{H}$的相对平行移动是一样的，对$\mathscr{E}(\mathscr{B})$的坐标变换和对$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的坐标变换也是一样的. 于是，从$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的连络$\mathscr{H}$出发可以完全定义好$\mathscr{E}(\mathscr{B})$上的一个连络$\widehat{\mathscr{H}}$.

很显然，从连络$\mathscr{H}$到连络$\widehat{\mathscr{H}}$的导出过程完全可以按相反次序

进行，因为这个过程仅依赖于下述三个条件：

i) $\mathscr{T}(\mathscr{B})$的结构群和$\mathscr{E}(\mathscr{B})$的结构群是一样的，

ii) $\mathscr{T}(\mathscr{B})$的丛卡和$\mathscr{E}(\mathscr{B})$的丛卡是1-1对应的，

iii) 对$\mathscr{T}(\mathscr{B})$的坐标变换和对$\mathscr{E}(\mathscr{B})$的坐标变换是一样的。

在这三个条件的每一个中，$\mathscr{T}(\mathscr{B})$和$\mathscr{E}(\mathscr{B})$的地位都可以互换。因此，$\mathscr{H}$和$\hat{\mathscr{H}}$是可以互推的，它们是1-1对应的。这个结论对一般的纤维丛都是适用的。

应用上面的结论到物质连络$\mathscr{H}$，我们看到相应的$\hat{\mathscr{H}}$是对每个参考标架丛$\mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A})$的一个结构连络。于是，一个物质连络$\mathscr{H}$存在，当且仅当参考标架丛$\mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A})$有一个结构连络。而主丛上结构连络的存在性是微分几何上已有的结果。因为后者的证明比较复杂，我们这里不再详细介绍了，感兴趣的读者请参阅有关专著，例如文献[8]第五章§4。于是物质连络的存在性将归结为参考标架丛上结构连络的存在性从而得到证明。

## §10.8 物质连络的可积性条件

在上一章我们已介绍过，一个连络$\mathscr{H}$称为可积的，如果它与一横截面族的切空间场重合。此外，一个连络称为**平坦的**，如果每一点$X\in\mathscr{B}$都可由一个局部坐标系$(X^A)$覆盖，相对于这个坐标系，$\mathscr{H}$的连络符号为零。如果这时$\mathscr{H}$还是物质连络，那么显然由$(X^A)$导出的丛卡是一个物质卡。因此，这时物体是局部均匀的。当然，一般地说，平坦的物质连络的存在对局部均匀性仅仅是充分但非必要的。

现在我们分两步来讨论一下一个连络对平坦连络的偏离：首先我们讨论**可积连络**对平坦连络的偏离，其次我们讨论不可积连络对可积连络的偏离。在每一步我们都得到表述这种偏离的充分

必要条件，我们还将看到物质连络的平坦性和可积性是与物体的均匀性有某种对应的。

第一步，我们假设连络$\mathscr{H}$是可积的，那么存在覆盖任一给定点$X$的$\mathscr{E}(\mathscr{B})$的局部水平横截面，例如f。令$(X^A)$是在$X$的邻域的局部坐标系，那么f有分量形式

$$\mathbf{f}=\{f^A{}_B\partial/\partial X_A,\ B=1,2,3\} \tag{10.8.1}$$

或等价地

$$\mathbf{f}=R_{[f^A{}_B]}(\mathbf{e}), \tag{10.8.2}$$

这里e是$(X^A)$的自然基。因为f是水平横截面，即f相对于$\mathscr{H}$的协变导数为零：

$$D\mathbf{f}=0, \tag{10.8.3}$$

或写成分量形式

$$\frac{\partial f^A{}_B}{\partial X^C}+\Gamma^A_{DC}f^D{}_B=0. \tag{10.8.4}$$

注意到分量矩阵$[f^D{}_B]$是非奇异的，$\mathscr{H}$相对于$(X^A)$的连络符号可表成

$$\Gamma^A_{BC}=-\overset{-1}{f}{}^D{}_B\frac{\partial f^A{}_D}{\partial X^C}. \tag{10.8.5}$$

从上式我们看到$\mathscr{H}$是平坦的，当且仅当存在一个坐标系$(X^A)$，在其中f的分量是常数，(从而$\partial f^A{}_D/\partial X^C=0$)；或等价地标架f与该坐标系的自然基重合。由§9.3末尾的讨论我们知后一结论成立的充分必要条件是

$$[\mathbf{f}_A,\mathbf{f}_B]=0,\quad 1\leqslant A,B\leqslant 3. \tag{10.8.6}$$

相对于坐标系$(X^A)$，Poisson括号积$[\mathbf{f}_A,\mathbf{f}_B]$有下面的分量形式：

$$[\mathbf{f}_A,\mathbf{f}_B]=\left(f^D{}_A\frac{\partial f^C{}_B}{\partial X^D}-f^D{}_B\frac{\partial f^C{}_A}{\partial X^D}\right)\frac{1}{\partial X^C}, \tag{10.8.7}$$

与(10.8.4)比较，我们看到

$$[\mathbf{f}_A,\mathbf{f}_B]=(\Gamma^C_{DE}-\Gamma^C_{ED})f^D{}_Af^E{}_B\frac{1}{\partial X^C}\ .\qquad(10.8.8)$$

因为$[f^A{}_B]$是非奇异的，这一公式显示，(10.8.6)成立，当且仅当连络符号$\Gamma^C_{DE}$关于两个下标对称。

从连络符号的变换规律(4.5.35)我们看到场$(\Gamma^A_{BC}-\Gamma^A_{CB})$满足张量场的分量的变换规律，由此可以定义一个张量S：

$$S_{BC}{}^A\overset{\mathrm{df}}{=}\Gamma^A_{BC}-\Gamma^A_{CB},\qquad(10.8.9)$$

称为连络$\mathscr{H}$的挠率张量。于是根据挠率张量S，可积连络$\mathscr{H}$是平坦的充分必要条件是

$$\mathbf{S}=0.\qquad(10.8.10)$$

上面我们讨论了平坦的连络和可积的连络之间的差别，这种差别可由挠率张量S来刻划。挠率张量S的几何意义可以完全类似于§8.2那样给以讨论（它正对应着位错理论中的三阶位错密度张量）。对固体晶体而言，唯一的物质连络是可积的，于是固体晶体的物质连络的挠率张量完全表征了物质的局部不均匀性。然而，对有连续的同格群的物体，例如流晶，物质连络一般既不平坦也不可积。因此，我们有必要讨论一下连络的可积性条件。

由(9.5.28)式我们知道，相对于提升坐标系$(X^A,v^B)$，水平空间$\mathscr{H}_{(X,v)}$是由下述集合张成的：

$$\mathscr{H}_{(X,v)}=\left\{\left(\frac{\partial}{\partial X^A}\right)_{(X,v)}-\Gamma^B_{CA}v^C\left(\frac{\partial}{\partial v^B}\right)_{(X,v)},\ A=1,2,3\right\}.\qquad(10.8.11)$$

正如在§9.5我们已经讨论过的那样，由 Frobenius 定理，流形$\mathscr{T}(\mathscr{B})$上的$n$维光滑切子空间场$\mathscr{H}$可积的充分必要条件是$\mathscr{H}$相对于$(X^A)$的曲率符号恒为零：

$$R^A{}_{BCD}=\frac{\partial\Gamma^A_{BD}}{\partial X^C}-\frac{\partial\Gamma^A_{BC}}{\partial X^D}+\Gamma^A_{EC}\Gamma^E_{BD}-\Gamma^A_{ED}\Gamma^E_{BC}=0,\qquad(10.8.12)$$

由曲率符号定义了一个张量场R，称为连络$\mathscr{H}$的曲率张量，条件

(10.8.12)又可等价地写成

$$\mathsf{R}=0. \tag{10.8.13}$$

曲率为零的连络的存在性是和参考标架丛是否平凡相联系的。如果参考标架丛$\mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A})$是平凡的，那么在$\mathscr{E}(\mathscr{B},\mathscr{A})$的一个整体横截面的切空间场给出曲率为零的物质连络。反之，如果物体$\mathscr{B}$是单连通且有一个曲率为零的物质连络，那么参考标架丛是平凡的。由于每个丛总是局部平凡的，对每一点$X$总存在一个物质连络，它在$X$的邻域是曲率为零的。

曲率张量的几何意义也可按§8.3 那样加以解释（它对应于缺陷理论中的四阶向错密度张量）.综合上面两步的结果我们有结论：一个连络是平坦的，当且仅当它的挠率和曲率均为零。对于物质连络，上述结论给出了下面的局部均匀性的特征：一个物体在点$X$处是局部均匀的，当且仅当存在物质连络，它的曲率和挠率张量在点$X$的一个邻域均为零。这个结论意味着局部平坦的可积的物质连络的存在是等价于局部均匀性的。换句话说，物质连络的曲率张量和挠率张量表示了物体$\mathscr{B}$的局部不均匀性。于是我们可以把第八章的讨论完全搬过来，例如，对固体晶体而言，唯一的物质连络是可积的，这时这个可积的物质连络的挠率张量就表征了§8.2位错理论中的物体的位错密度张量。更一般地，物质连络的曲率张量和挠率张量都可以不为零,此时相应的是§8.3的一般缺陷理论。位错、向错和缺陷都是物体的不均匀性的种种具体表现。因此，就结果而言，第八章的讨论在这里是完全适用的，我们不再重复了。但是应该指出，本章介绍的理性理论从概念上与上几章是非常不同的。我们已经看到，本章的全部讨论都是从物体的本构假设出发的。一旦一个物体的本构方程建立起来，物体的几何结构（物质切丛、参考标架丛以及物质连络，从而连络的曲率张量和挠率张量）就完全确定了。于是，几何结构是理论的自然的结果，而不是最初的假设。这样的理论框架将显

得更加自然和统一。而且，作为整个讨论的出发点的本构假设是非常一般的，这样的一个理论可以期望能被应用于更广泛的领域，而不必只限于弹性体或固体。一些作者已应用该理论去讨论非均匀弹性体，建立起这些弹性体的运动方程并得到一些静力学和动力学问题的通解。上述理论也已被推广到热弹性体乃至非弹性体。总之，这个理性的变形体非协调理论的理论框架是近代流形论在物理和力学问题中应用的成功范例，并且有待人们进一步完善和发展。

# 第十一章 位错的规范场理论简介

基本粒子物理是物理学最活跃的前沿学科之一。在多种多样的基本粒子理论中，对称性理论居于主导地位。50年代发现了宇称不尽守恒，完善了基本粒子的时空对称理论。60年代建立了幺正对称理论，预言了夸克的存在，进入了基本粒子的夸克时代。70年代确立了弱电统一规范理论，初创了量子色动力学，开始了规范理论的统治局面。

物理学中的场论理论与方法，也是处理连续统力学行为的适宜工具之一。经典连续统场论的静力学守恒律是1972年给出的[27]。用近代物理中规范场的方法去处理位错和向错，还是一个刚刚开始的研究领域。1978年我国的欧发研究了位错的规范变换[1]，1979年国外相继发表了晶体缺陷规范场理论的结果[25,20,21]，到了1983年第一本关于位错和向错的规范场理论的专著[26]问世了。这是一个方兴未艾的新的学科方向，并正引起国内外许多学者的关注。在结束本书之前，我们简单介绍一下变形体非协调理论的这个新领域。至于有关内容的详细介绍请参见有关文献[26,7]。而在介绍位错的规范场理论之前，有必要先介绍一下规范对称性、破缺对称性等规范场的基本概念。这些内容主要参考[5][31]。

## §11.1 经典场

在物理学中，通常将具有不可数无穷多个自由度的物理系统叫做场。这里的“不可数无穷多”的含义，还指描述场状态的物

理量——场量 $\phi(x)$ 在时空系中可取不可数无穷多个值，一般地记

$$\phi(x)=(\phi_\nu(x),\ \nu\in I), \tag{11.1.1}$$

而当

$$\phi(x)=(\phi_1(x),\ \phi_2(x),\cdots,\ \phi_N(x)) \tag{11.1.2}$$

时，该物理系统的自由度便是有限数$N$，这时的场函数与单粒子的波函数等同。于是$\phi_\alpha(x)$ ($\alpha=1,2,\cdots,N$) 起着有限自由度力学系统中广义坐标的作用。

在场论中，人们总是先研究"自由场"——孤立场，然后再进而研究二种或多种场的耦合。从而，必须研究它们之间的交互作用。

设自由场$\phi(x)$的 Lagrange 函数为

$$L=L(\phi(x),\ \partial_\mu\phi(x))=L(\phi,\partial_\mu\phi), \tag{11.1.3}$$

作用量泛函是

$$S(\phi)=\int_V L(\phi,\partial_\mu\phi)\,dV, \tag{11.1.4}$$

这里，$V$是$n$维空间的一个区域。一个力学系统的运动可用它的 Lagrange 函数$L(\phi)$或作用量泛函 $S(\phi)$ 去描述，这表现为下面的一条公理：

**Hamilton 最小作用量原理**：一个力学系统总存在一个作用量泛函 $S(\phi)$，这个泛函对于实际运动取最（极）小值。因此，它的一次变分等于零，即

$$\delta S(\phi)=\int_V\left[\frac{\partial L}{\partial\phi_\alpha}\delta\phi_\alpha+\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)}\delta(\partial_\mu\phi_\alpha)\right]dV=0, \tag{11.1.5}$$

当边界条件

$$(\delta\phi_\alpha)\Big|_{\partial V}=0 \tag{11.1.6}$$

成立时。式中，$\partial V$表示$V$的周界曲面。在本章我们用小写希腊字母$\alpha,\beta,\gamma=1,2,\cdots,N$表示场的分量指标，而用小写希腊字母$\mu$,

$\nu,\lambda,\sigma=1,2,3,4$表示四维时空空间坐标的指标，其中$x^4=it$. 对重复指标仍采用求和约定。当然，指标$\alpha,\beta,\cdots$是从1到$N$求和，而指标$\lambda,\mu,\nu,\sigma$是从1到4求和。在不致引起混淆的地方就不再说明了。

经典场论中一个十分重要的定理表明：

Hamilton原理等价于**Euler-Lagrange**（以后简记为EL）**方程组**：

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_\alpha}-\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{\alpha,\mu}}\right)=0,\ \alpha=1,2,\cdots,N. \tag{11.1.7}$$

事实上，注意到变分和微分的次序可以互换：

$$\delta(\phi_{\alpha,\mu})=(\delta\phi_\alpha)_{,\mu} \tag{11.1.8}$$

以及

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{\alpha,\mu}}\delta\phi_\alpha\right)_{,\mu}=\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{\alpha,\mu}}\right)_{,\mu}\delta\phi_\alpha+\frac{\partial L}{\partial \phi_{\alpha,\mu}}\delta\phi_{\alpha,\mu}, \tag{11.1.9}$$

由此可得

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_{\alpha,\mu}}\delta\phi_{\alpha,\mu}=\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{\alpha,\mu}}\delta\phi_\alpha\right)_{,\mu}-\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{\alpha,\mu}}\right)_{,\mu}\delta\phi_\alpha, \tag{11.1.10}$$

将此式代入Hamilton原理的(11.1.5)式中有

$$\int_V\left[\frac{\partial L}{\partial \phi_\alpha}-\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{\alpha,\mu}}\right)_{,\mu}\right]\delta\phi_\alpha\,dV+\int_V\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{\alpha,\mu}}\delta\phi_\alpha\right)_{,\mu}dV=0, \tag{11.1.11}$$

对最后一个积分用散度定理并由边界条件(11.1.6)知

$$\int_V\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{\alpha,\mu}}\delta\phi_\alpha\right)_{,\mu}dV=\int_{\partial V}\frac{\partial L}{\partial \phi_{\alpha,\mu}}\delta\phi_\alpha n_\mu dS=0, \tag{11.1.12}$$

式中，$n_\mu$为$\partial V$的单位外法向量。于是由$V$和$\delta\phi_\alpha$的任意性便可以

从(11.1.11)证得EL方程组。

在定域性场论中，Lagrange函数常表现为

$$L=L(\phi_\alpha,\ \phi_{\alpha,\mu},\ \phi_{\alpha,\mu\nu}),\tag{11.1.13}$$

即 Lagrange 函数依赖于 场 量 $\phi_\alpha$ 和 它 的一、二阶 导 数，此 时 Hamilton 原理的边界条件(11.1.6)变为

$$(\delta\phi_\alpha)\Big|_{\partial V}=0,\qquad (\delta\phi_{\alpha,\mu})\Big|_{\partial V}=0.\tag{11.1.14}$$

用完全类似的方法可以证明Hamilton原理等价于如下的EL方程组：

$$\frac{\partial L}{\partial\phi_\alpha}-\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{\alpha,\mu}}\right)_{,\mu}+\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{\alpha,\mu\nu}}\right)_{,\mu\nu}=0,\ \alpha=1,2,\cdots,N.\tag{11.1.15}$$

经典场论也叫作 Lagrange 场论. 下面几种自由场的例子是 Hamilton 原理或 Lagrange 场论的具体表现.

（1） 标量场（物质场）

按场论的观点，自由粒子场对应于自由量子 场，简 称 自 由 场。最简单的自由场是只有一个场量的场，即 标 量 场 或赝标量场. 只有用交互作用才能区分这两种场. 由于这里的场变量只有一个空间分量，它所能描述的微观粒子的自旋是零。

设$\phi(\mathbf{x})$是场量，其中$\mathbf{x}=(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)$，$x^4=it$ 是时空坐标，而时空的度量是$g_{\mu\nu}$，它满足

$$(d\mathbf{x})^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2-(dt)^2.\tag{11.1.16}$$

因为场的观念是与一个空间的物质分布相联系着的，实标量场作为动力系统的独立力学变量是$\phi$和$\phi_{,\mu}$. 因此，Lagrange 函数为

$$L=L(\phi,\phi_{,\mu})=-\frac{1}{2}(\phi_{,\mu}\phi_{,\mu}+m^2\phi^2),\tag{11.1.17}$$

而且有

$$\frac{\partial L}{\partial \phi}=-m^2\phi \tag{11.1.18}$$

和

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}}=-\phi_{,\mu}, \tag{11.1.19}$$

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}}\right)_{,\mu}=(\phi_{,\mu})_{,\mu}=\Box\phi, \tag{11.1.20}$$

这里，微分算子

$$\Box \overset{\text{df}}{=} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2}+\frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2}+\frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\Delta-\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \tag{11.1.21}$$

其中Δ是通常的三维拉普拉斯算子。于是，实标量场 $\phi$ 的 EL 方程，即相对论性波动方程为

$$(\Box-m^2)\phi=0, \tag{11.1.22}$$

该方程就是人们熟知的Klein-Gordon方程。

（2） 复标量场

众所周知，在实标量场理论中，它所描述的粒子是不荷电的，并且只描述粒子与反粒子全同的介子的性质与运动规律。但是，自从相对论量子力学的电子理论提出反粒子与反粒子-粒子对的概念之后，荷电相等而符号相反的同类粒子场被看成粒子-反粒子对。这样的粒子具有两个荷电自由度。如果我们试图用量子场论来描述粒子-反粒子对的性质和运动规律，则场量应具有两个独立分量，$\phi(x)=(\phi_1(x),\ \phi_2(x))$。实践证明，一个场量是复函数的标量场或赝标量场就能实现上述目的。

我们设$\phi(x)$是复标量场的场量，则$\bar{\phi}(x)$也是一个独立的场量。为保证 Lagrange 函数是实的这一基本要求，Lagrange 函数应是

$$L=\partial_\mu\bar{\phi}\,\partial_\mu\phi-m^2\bar{\phi}\phi. \tag{11.1.23}$$

于是，我们可以得到EL方程分别为

$$(\Box-m^2)\phi=0, \tag{11.1.24}$$

和

$$(\Box-m^2)\bar{\phi}=0. \tag{11.1.25}$$

（3） 电磁场

电磁场的宏观运动规律，就是经典的电动力学方程组

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\partial_\nu F_{\lambda\rho}=0, \tag{11.1.26}$$

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}=0, \tag{11.1.27}$$

式中 $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ 是关于四个指标完全反对称的四阶张量，且$\epsilon_{1234}=1$；$F_{\mu\nu}$ 是电磁场的场强张量，是反对称的二阶张 量：$F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$。

当用电磁势（四维向量）$A_\mu$ 来表示 $F_{\mu\nu}$ 时有

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu. \tag{11.1.28}$$

电磁场的自旋为1。而自旋为1的场的Lagrange函数可写为

$$L=-\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)^2-\frac{1}{2}m^2A_\nu^2. \tag{11.1.29}$$

对于电磁场，$m=0$，则由(11.1.29)得到电磁场的 Larange 函数为

$$L=-\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)^2. \tag{11.1.30}$$

因为

$$\frac{\partial L}{\partial A_\mu}=0, \tag{11.1.31}$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_{\nu,\mu}}=-\partial_\mu A_\nu, \tag{11.1.32}$$

于是，我们得到电磁场的波动方程是

$$\Box A_\nu=0. \tag{11.1.33}$$

不难看出，与标量场不同，电磁场是 $m=0$，自旋等于 1 的 向 量

场，而$A_\nu$是向量势。

（4） Dirac 场

Dirac 场又叫旋量场，它是描述自旋等于 1/2 的粒子的性质和运动规律的。它不同于标量场和向量场。

引入 4×4 的 Dirac 的$\gamma$矩阵

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_j=\begin{bmatrix} 0 & -i\sigma_j \\ i\sigma_j & 0 \end{bmatrix}, \qquad (j=1,2,3) \\
&\text{其中} \\
&\sigma_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \sigma_2=\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},\quad \sigma_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\
&\gamma_4=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}=\beta, \\
&\text{其中} \\
&I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}\right\} \tag{11.1.34}$$

这些矩阵满足

$$\gamma_\mu^+=\gamma_\mu, \tag{11.1.35}$$

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu\nu}, \tag{11.1.36}$$

这里$\gamma^+$表示$\gamma$的厄密共轭矩阵，并且进而定义

$$\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \tag{11.1.37}$$

$$\sigma_{\mu\nu}=\frac{1}{2i}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]=\frac{1}{2i}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu). \tag{11.1.38}$$

为了保证 Lagrange 函数是实标量，旋量场的 Lagrange 函数应为

$$L=-\bar{\psi}(x)(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi(x). \tag{11.1.39}$$

由(11.1.7)得 Dirac 场的运动方程为

$$(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi=0 \tag{11.1.40}$$

与伴随 Dirac 方程

$$\partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu - m\bar{\psi} = 0. \tag{11.1.41}$$

（5） Dirac 场-电磁场耦合

在场论中，人们总是先研究自由场，然后再研究二种或多种场的耦合。当存在几种场的耦合时，其重点是如何处理交互作用问题。我们设 Dirac 场与电磁场交互作用部分的 Lagrange 函数记作

$$L_{DE} = ie\bar{\psi}\gamma_\mu \psi A_\mu, \tag{11.1.42}$$

则耦合场的总的 Lagrange 函数是

$$L = -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)^2 + ie\bar{\psi}\gamma_\mu \psi A_\mu, \tag{11.1.43}$$

对$\delta A_\mu$，$\delta\psi$和$\delta\bar{\psi}$分别求变分并由(11.1.7)式得到

$$\Box A_\mu = -J_\mu \quad \text{（有源）}, \tag{11.1.44}$$

$$[\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) + m]\psi = 0 \tag{11.1.45}$$

和

$$(\partial_\mu + ieA_\mu)\bar{\psi}\gamma_\mu - m\bar{\psi} = 0. \tag{11.1.46}$$

由此看出，有电磁场耦合时的 Dirac 方程(11.1.45)和(11.1.46)式可以看成是从(11.1.40)和(11.1.41)式经过如下变换

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu \mp ieA_\mu \tag{11.1.47}$$

后得到的。我们称$D_\mu$为协（共）变导数。物理学中将$\partial_\mu$替换成$D_\mu$叫做最小电磁耦合原理。它是处理交互作用的一种绝妙的数学技巧。在后面的第四节中我们还要进一步介绍。

## §11.2 时空连续变换下的不变性

对称理论是基本粒子理论的重要内容，规范不变性是场的一种基本对称性。为了便于理解对称理论的观点和方法，我们先介

绍一下场在时空连续变换下的不变性，然后进入规范不变性的讨论。时空连续变换下的不变性包括平移不变性和洛伦兹不变性。平移不变性反映时空的均匀性，是能量、动量守恒律的基础。洛伦兹不变性是四维时空转动下的不变性，反映四维时空的各向同性。它所包括的三维空间转动下的不变性，是动量矩守恒的基础。

时空平移是指时空坐标$x^\mu$的平移变换，定义为

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + b^\mu, \tag{11.2.1}$$

$$\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = b^\mu, \tag{11.2.2}$$

$b^\mu$是与$x^\mu$无关的常数，$\mu=1,2,3,4$。

在这个变换下，场量$\phi_\alpha(\mathrm{x})$也要发生相应的变化。人们认为，变换前后的场量应相等，即

$$\phi_\alpha(\mathrm{x}) \to \phi'_\alpha(\mathrm{x}') = \phi_\alpha(\mathrm{x}), \tag{11.2.3}$$

$\alpha=1,2,\cdots$，$N$ 是场的分量指标。$\phi'_\alpha(\mathrm{x}')$ 由两重变化而成：作为x 的函数，它随 x 变为 $\phi_\alpha(\mathrm{x}')$；由于场本身的性质，它变换为$\phi'_\alpha(\mathrm{x})$，而且定义特征变换为

$$\delta\phi_\alpha(\mathrm{x}) = \phi'_\alpha(\mathrm{x}) - \phi_\alpha(\mathrm{x}), \tag{11.2.4}$$

由(11.2.3)式得到

$$\phi'_\alpha(\mathrm{x}) = \phi_\alpha(\mathrm{x}-\mathrm{b}) = \phi_\alpha(\mathrm{x}) - b^\mu \partial_\mu \phi_\alpha(\mathrm{x}), \tag{11.2.5}$$

在(11.2.5)式中我们假定了$b^\mu$是一个小量且只取一阶近似。因此，场量的特征变换为

$$\delta\phi_\alpha(\mathrm{x}) = -b^\mu \partial_\mu \phi_\alpha(\mathrm{x}). \tag{11.2.6}$$

人们认为，时空空间是均匀的，在时空空间各点发生的物理规律应该是相同的。因此，用来描述物理规律的 Lagrange 函数或EL场方程组在不同的时空点应该具有相同的形式。换句话说，在上述平移变换下，Lagrange 函数是不变的，即

$$L(\phi_\alpha(\mathrm{x}),\ \partial_\mu\phi_\alpha(\mathrm{x})) \to L'(\phi'_\alpha(\mathrm{x}'),\ \partial_{\mu'}\phi'_\alpha(\mathrm{x}'))$$
$$= L(\phi'_\alpha(\mathrm{x}'),\ \partial_{\mu'}\phi'_\alpha(\mathrm{x}'))$$

$$=L(\phi_a(\mathbf{x}),\ \partial_\mu\phi_a(\mathbf{x})),\tag{11.2.7}$$

式中第一个等号表示变换前后的 Lagrange 函数的形式一样，第二个等号表示变换前后的 Lagrange 函数的大小一样。这种不变性称**平移不变性**。以后我们都将用这种数学形式来表示各种变换下的不变性。

从上述的时空均匀性、平移不变性可以导出能量、动量守恒定律。事实上，由(11.2.7)式得

$$L(\phi'_a(\mathbf{x}),\ \partial_\mu\phi'_a(\mathbf{x}))-L(\phi_a(\mathbf{x}-\mathbf{b}),\ \partial_\mu\phi_a(\mathbf{x}-\mathbf{b}))=0,\tag{11.2.8}$$

即

$$\begin{aligned}&L(\phi'_a(\mathbf{x}),\ \partial_\mu\phi'_a(\mathbf{x}))-L(\phi_a(\mathbf{x}),\ \partial_\mu\phi_a(\mathbf{x}))\\&\quad+L(\phi_a(\mathbf{x}),\ \partial_\mu\phi_a(\mathbf{x}))-L(\phi_a(\mathbf{x}-\mathbf{b}),\ \partial_\mu\phi_a(\mathbf{x}-\mathbf{b}))\\&=\frac{\partial L}{\partial\phi_a(\mathbf{x})}\delta\phi_a(\mathbf{x})+\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_a(\mathbf{x}))}\delta(\partial_\mu\phi_a(\mathbf{x}))+\frac{\partial L}{\partial x^\mu}\delta x^\mu\\&=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_a(\mathbf{x}))}\delta\phi_a(\mathbf{x})+L\delta x^\mu\right]\\&=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_a(\mathbf{x}))}(-b^\nu\partial_\nu\phi_a(\mathbf{x}))+Lg^\mu_\nu b^\nu\right]\\&=0.\end{aligned}\tag{11.2.9}$$

由于$b^\nu$是任意的小量，所以从上式得到

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}T^{\mu\nu}=0,\tag{11.2.10}$$

其中

$$T^{\mu\nu}=Lg^{\mu\nu}-\partial^\mu\phi_a(\mathbf{x})\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu\phi_a(\mathbf{x}))}.\tag{11.2.11}$$

(11.2.11)表示的$T^{\mu\nu}$就是场的能量、动量张量，而(11.2.10)式表示的连续性方程，就是能量、动量守恒的微分形式。对(11.2.10)式取体积分得

$$\int_V\left(\frac{\partial T^{\mu 1}}{\partial x^1}+\frac{\partial T^{\mu 2}}{\partial x^2}+\frac{\partial T^{\mu 3}}{\partial x^3}\right)dV+\int_V\frac{\partial T^{\mu 4}}{\partial x^4}dV=0, \tag{11.2.12}$$

应用三维空间的散度定理，上式变成

$$\oint_S T^{\mu i}\,dS_i+\frac{\partial}{\partial x^4}\int_V T^{\mu 4}dV=0, \tag{11.2.13}$$

式中 $i$ 从1到3求和。这就是能量、动量守恒定律的积分形式。

把(11.2.13)式应用到场所占有的整个空间，在包围整个场的表面上 $T^{\mu i}=0$，$i=1,2,3$，则(11.2.13)成为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^{\mu 4}dV=0, \tag{11.2.14}$$

由此可知

$$p^\mu=\int_V T^{\mu 4}dV,\qquad \mu=1,2,3,4 \tag{11.2.15}$$

是守恒量。我们把它叫做场的四维动量。而

$$-E=\int_V T^{44}\,dV=\int_V[L-\dot{\phi}_\alpha(\mathbf{x})\pi^\alpha(\mathbf{x})]dV \tag{11.2.16}$$

是场的能量，这里 $\dot{\phi}_\alpha\equiv d\phi_\alpha/dt$，

$$p^i=\int_V T^{i4}\,dV=-\int_V\pi^\alpha(\mathbf{x})\partial_i\phi_\alpha(\mathbf{x})dV,\quad i=1,2,3 \tag{11.2.17}$$

是场的动量。以上诸式中的

$$\pi^\alpha(\mathbf{x})\overset{\text{df}}{=}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}_\alpha(\mathbf{x})} \tag{11.2.18}$$

是和场量 $\phi_\alpha(\mathbf{x})$ 相应的正则动量（密度）。

下面我们讨论洛伦兹变换下的不变性。时空坐标作变换

$$x^\mu\to x'^\mu=Q^{\mu\nu}x_\nu \tag{11.2.19}$$

且满足条件

$$x'^\mu x'_\mu=x^\nu x_\nu, \tag{11.2.20}$$

则称为洛伦兹变换。$Q^{\mu\nu}$是和$x^{\mu}$无关的变换系数。由上式可知它应该满足条件

$$Q^{\mu\nu}Q_{\nu\lambda}=g^{\mu}_{\lambda}. \tag{11.2.21}$$

如果

$$Q^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}+\epsilon^{\mu\nu}, \tag{11.2.22}$$

且$\epsilon^{\mu\nu}$是一个小量且满足反对称条件

$$\epsilon^{\mu\nu}=-\epsilon^{\nu\mu}, \tag{11.2.23}$$

那么就是无穷小洛伦兹变换。这时

$$\delta x^{\mu}=x'^{\mu}-x^{\mu}=\epsilon^{\mu\nu}x_{\nu}. \tag{11.2.24}$$

在无穷小洛伦兹变换下，场量$\phi_{\alpha}(x)$也应该作一个无穷小变换，即

$$\phi_{\alpha}(x)\to\phi'_{\alpha}(x')=\left(\delta_{\alpha\beta}+\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\right)\phi^{\beta}(x). \tag{11.2.25}$$

式中的$S_{\mu\nu,\alpha\beta}$是由场量$\phi_{\alpha}(x)$的性质确定的变换系数，实际上是由相应粒子的自旋确定的变换系数。$i/2$是为了使$S_{\mu\nu,\alpha\beta}$的意义更明确而引进的，$\phi'_{\alpha}(x')$也包含两重变换，它的特征变化为

$$\delta\phi_{\alpha}(x)=\phi'_{\alpha}(x)-\phi_{\alpha}(x). \tag{11.2.26}$$

由(11.2.25)式可知

$$\begin{aligned}\phi'_{\alpha}(x)&=\phi_{\alpha}(x-\delta x)+\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\phi^{\beta}(x-\delta x)\\&=\phi_{\alpha}(x)-\epsilon^{\mu\nu}x_{\nu}\partial_{\mu}\phi_{\alpha}(x)+\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\phi^{\beta}(x)\\&=\phi_{\alpha}(x)+\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}[(x_{\mu}\partial_{\nu}-x_{\nu}\partial_{\mu})\delta_{\alpha\beta}+iS_{\mu\nu,\alpha\beta}]\phi^{\beta}(x),\end{aligned} \tag{11.2.27}$$

代入(11.2.26)式得

$$\delta\phi_{\alpha}(x)=\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}[(x_{\mu}\partial_{\nu}-x_{\nu}\partial_{\mu})\delta_{\alpha\beta}+iS_{\mu\nu,\alpha\beta}]\phi^{\beta}(x). \tag{11.2.28}$$

在洛伦兹变换下的不变性，可以用

$$L(\phi'_a(\mathbf{x}'),\ \partial_{\mu'}\phi'_a(\mathbf{x}'))=L(\phi_a(\mathbf{x}),\partial_\mu\phi_a(\mathbf{x})) \tag{11.2.29}$$

来表示，它反映时空空间的各向同性。由它可知

$$L(\phi'_a(\mathbf{x}),\ \partial_\mu\phi'_a(\mathbf{x}))-L(\phi_a(\mathbf{x}-\epsilon\mathbf{x}),\ \partial_\mu\phi_a(\mathbf{x}-\epsilon\mathbf{x}))$$

$$=\frac{\partial L}{\partial\phi_a(\mathbf{x})}\delta\phi_a(\mathbf{x})+\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_a(\mathbf{x}))}\delta(\partial_\mu\phi_a(\mathbf{x}))+\frac{\partial L}{\partial x^\mu}\delta x^\mu$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_a(\mathbf{x}))}\ \delta\phi_a(\mathbf{x})+Lg^{\mu\nu}\ \delta x_\nu\right]=0. \tag{11.2.30}$$

把(11.2.23)和(11.2.28)代入上式得

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_a(\mathbf{x}))}\cdot\frac{1}{2}\epsilon^{\nu\lambda}[(x_\nu\partial_\lambda-x_\lambda\partial_\nu)\delta_{a\beta}+iS_{\nu\lambda,a\beta}]\phi^\beta(\mathbf{x})\right.$$

$$\left.+Lg^{\mu\nu}\epsilon_{\nu\lambda}x^\lambda\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\epsilon^{\nu\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{x_\lambda\left[\ g^\mu_\nu L-\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_a(\mathbf{x}))}\ \partial_\nu\phi_a(\mathbf{x})\right]\right.$$

$$-x_\nu\left[\ g^\mu_\lambda L-\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_a(\mathbf{x}))}\ \partial_\lambda\ \phi_a(\mathbf{x})\right]$$

$$\left.+i\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_a(\mathbf{x}))}S_{\nu\lambda,a\beta}\phi^\beta(\mathbf{x})\ \right\}=0. \tag{11.2.31}$$

由于 $\epsilon^{\nu\lambda}$是任意的，因而将(11.2.11)代入就得到

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}M_{\lambda\nu,\mu}=0, \tag{11.2.32}$$

其中

$$M_{\lambda\nu,\mu}=x_\lambda T_{\nu\mu}-x_\nu T_{\lambda\mu}+i\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu\phi_a(x))}S_{\nu\lambda,a\beta}\phi^\beta(\mathbf{x}). \tag{11.2.33}$$

这就是四维动量矩守恒定律和四维动量矩张量。而守恒的四维动量矩就是

$$J_{\lambda\nu}=\int_V M_{\lambda\nu,4}\,dV. \qquad (11.2.34)$$

当 $\lambda$, $\nu\to i,j=1,2,3$时就是普通的动量矩

$$J_{ij}=\int_V [x_i T_{j4}-x_j T_{i4}+i\pi^{\alpha}(\mathbf{x})S_{ij,\alpha\beta}\phi^{\beta}(\mathbf{x})]dV. \qquad (11.2.35)$$

显然，
$$-i\int_V \pi^{\alpha}(\mathbf{x})S_{ij,\alpha\beta}\phi^{\beta}(\mathbf{x})dV$$
是自旋动量矩。

从以上论述可知，对称性、不变性和守恒定律是紧密联系着的，Noether 定理早就指出了这种联系。这种联系使对称理论在物理学中占有重要的地位。

## §11.3 整体规范不变性

上节我们讨论了场在时空空间的连续不变性。现在我们转入正题，讨论规范不变性即场在内部空间的对称性。内部空间是为了描述粒子场的内部性质例如电荷、重子数、轻子数、同位旋等等而引入的抽象空间。

在规范理论中，内部空间的"转动"用**规范群**$G$来表示。规范群是异于时空变换群的场量变换群。依 Noether 对称性定理，每一种规范群不改变场方程的形式，且它们还支持一种守恒律。规范群的元素写作

$$\mathrm{u}(\theta)=\exp[-i\theta^{a}\mathrm{T}_{a}]. \qquad (11.3.1)$$

$\mathrm{T}_a$是群$G$的生成元，满足对易关系

$$[\mathrm{T}_{\alpha},\mathrm{T}_{\beta}]=if^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathrm{T}_{\gamma}, \qquad (11.3.2)$$

$f^{\gamma}_{\alpha\beta}$是群$G$的结构常数，$\alpha,\beta,\gamma=1,2,\cdots,N$. $N$是群的维数，它等于生成元的个数。$\theta^a$是群$G$的参数，叫做群参数，也有$N$个。

例如在量子动力学中采用的一维幺正变换群$U(1)$中

$$\mathrm{u}(\theta)=\exp[-i\theta\mathrm{Q}], \qquad (11.3.3)$$

其中$\theta$是群参数（常数），电荷算子Q＝T是生成元。

如果规范群是$SU(n)$群，那么$N=n^2-1$，就有$n^2-1$个生成元$\mathrm{T}_a$，$a=1,2,\cdots,n^2-1$。群元素的表示$\mathrm{u}(\theta)$就是幺正、幺模的矩阵。生成元的表示就是厄密、无迹的矩阵。而且，在$n^2-1$个生成元中，有$n-1$个是可以同时对角化的。

如果规范群是$n$维实空间的转动群，那么$N=n(n-1)/2$，就有$n(n-1)/2$个生成元。它的表示$\mathrm{T}_a$，$a=1,2,\cdots,n(n-1)/2$就是厄密、纯虚、反对称的矩阵。它的基本表示可以写成

$$\mathrm{L}_{\alpha\beta}=-i(\mathrm{E}_{\alpha\beta}-\mathrm{E}_{\beta\alpha}),\tag{11.3.4}$$

其中矩阵$E_{\alpha\beta}$的第$\gamma$行第$\delta$列元素为

$$(E_{\alpha\beta})_{\gamma\delta}=\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta},\quad \alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2,\cdots,n.\tag{11.3.5}$$

群的生成元可以用作描写场粒子性质的算子。在具体问题中，要选择什么样的规范群，归根结底要由场粒子的具体性质来确定，要由粒子之间的相互作用规律来确定。

在内部空间的“转动”下，场量$\phi_\alpha(\mathrm{x})$作变换

$$\phi_\alpha(\mathrm{x})\to\phi'_\alpha(\mathrm{x})=\exp[-i\theta^\beta T^\gamma_{\beta\alpha}]\phi_\gamma(\mathrm{x}),\tag{11.3.6}$$

这种变换叫做规范变换。当群参数$\theta^a$是与时空坐标x无关的常数时，时空各点的场量都作同样的变换，叫做整体规范变换。如果群参数$\theta^a$是时空坐标x的函数$\theta^a(\mathrm{x})$，那么场量在时空各点将可能作各自不同的变换了，这时的变换叫做定域规范变换。在这一节我们先只讨论$\theta^a$与x无关的整体规范变换。$\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2,\cdots,n$是场在内部空间的分量指标，$n$是内部空间的表示的维数，$T^\beta_{a\gamma}$是生成元$\mathrm{T}_a$的$n$维表示，是$n\times n$矩阵的矩阵元。$n$维表示空间的向量$\boldsymbol{\phi}(\mathrm{x})$的$n$个分量$\phi_\alpha(\mathrm{x})$，$\alpha=1,2,\cdots,n$，可以写成

$$\boldsymbol{\phi}(\mathrm{x})=\begin{pmatrix}\phi_1(\mathrm{x})\\ \phi_2(\mathrm{x})\\ \vdots\\ \phi_n(\mathrm{x})\end{pmatrix},\tag{11.3.7}$$

它在内部空间“转动”下的交换即规范变换(11.3.6)式可以简写成

$$\phi'(x)=\exp[-i\theta^a T_a]\phi(x). \tag{11.3.8}$$

应注意这里$T_a$一般地是$n\times n$矩阵。由于$\theta^a$是与时空坐标无关的常数，场量的时空导数$\partial_\mu\phi(x)$就象场量$\phi(x)$一样变换，即

$$\partial_\mu\phi(x)\to\partial_\mu\phi'(x)=\exp[-i\theta^a T_a]\partial_\mu\phi(x). \tag{11.3.9}$$

如果物理系统的 Lagrange 函数$L$在整体规范变换下不变，即

$$\begin{aligned}L'&=L'(\phi'(x'),\partial_{\mu'}\phi'(x'))=L(\phi'(x),\partial_\mu\phi'(x))\\&=L(\phi(x),\ \partial_\mu\phi(x)),\end{aligned} \tag{11.3.10}$$

我们便说 Lagrange 函数具有**整体规范不变性**。它描述了物理系统在内部空间的对称性。和上节一样，我们可以从(11.3.10)导出相应的守恒定律和守恒量。Noether 对称性定理所要求的规范变换群常是无穷小变换群。在无穷小变换下，群参数$\theta^a$是无穷小量，可以关于$\theta^a$展开到一次式得到

$$u(\theta^a)=I-i\theta^a T_a. \tag{11.3.11}$$

于是，规范变换(11.3.8)变为

$$\phi'(x)=(I-i\theta^a T_a)\phi(x), \tag{11.3.12}$$

$$\delta\phi(x)=\phi'(x)-\phi(x)=-i\theta^a T_a\phi(x). \tag{11.3.13}$$

由(11.3.10)式按二元函数的 Taylor 展式展开并略去高阶小量后得到

$$\begin{aligned}&L(\phi'(x),\ \partial_\mu\phi'(x))-L(\phi(x),\partial_\mu\phi(x))\\&=\frac{\partial L}{\partial\phi(x)}\delta\phi(x)+\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\delta(\partial_\mu\phi(x))\\&=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\delta\phi(x)\right]=0.\end{aligned} \tag{11.3.14}$$

将(11.3.13)代入并考虑到$\theta^a$的任意性，就得到

$$\partial_\mu J^\mu_a=0, \tag{11.3.15}$$

式中

$$J_a^\mu = -i\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}T_a\phi(x). \qquad (11.3.16)$$

这就是和所讨论的内部对称性相应的守恒定律. $J_a^\mu$是守恒流，相应的守恒荷是

$$Q_a = \int_V J_a^4 dV = -i\int_V \pi(x)T_a\phi(x)dV, \qquad (11.3.17)$$

其中$\pi(x)$是由(11.2.18)表示的和场量相应的正则动量。

例如，如果讨论的内部对称性是电荷，则$T_a$是电荷算子$Q$,

$$J^\mu = -i\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}Q\phi(x)$$

是电流密度，这时的整体规范群$U(1)$支持电荷守恒定律

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \qquad (11.3.18)$$

当讨论的内部对称性是同位旋，则$T_a$是同位旋算子的表示矩阵，$J_a^\mu$是同位旋流，这时整体规范群$SU(2)$支持同位旋守恒律：

$$\partial_\mu J_a^\mu = 0. \qquad (11.3.19)$$

## §11.4 定域规范不变性

在上节我们说到规范变换用规范群

$$u(\theta^a) = \exp[-i\theta^a T_a] \qquad (11.4.1)$$

来实现，场量按

$$\phi(x)\to\phi'(x) = \exp[-i\theta^a T_a]\phi(x) \qquad (11.4.2)$$

的规律变换。当群参数$\theta^a$与x无关时，时空各点的场量都作同样的变换，叫做整体规范变换。当群参数$\theta^a$与x有关时，$\theta^a$是x的函数$\theta^a(x)$，时空各点的场量可各自不同地变换，叫做**定域规范变换**. 在定域规范变换下，场量按

$$\phi(x)\to\phi'(x) = \exp[-i\theta^a(x)T_a]\phi(x) \qquad (11.4.3)$$

的规律变换，而场量的导数$\partial_\mu\phi(x)$的变换

$$\partial_\mu \phi(x) \to \partial_\mu \phi'(x) = \exp[-i\theta^\alpha(x) T_\alpha] \partial_\mu \phi(x)$$
$$-i\partial_\mu \theta^\beta(x) T_\beta \exp[-i\theta^\alpha(x) T_\alpha] \phi(x)$$
$$\neq \exp[-i\theta^\alpha(x) T_\alpha] \partial_\mu \phi(x) \tag{11.4.4}$$

和场量 $\phi(x)$ 的变换规律不一样。这是和整体规范变换不同的重要特点。显然，把在上节说到的在整体规范变换下不变的 Lagrange函数 $L$ 推广到定域规范变换，由于 $\partial_\mu \phi(x)$ 和 $\phi(x)$ 不再按同样的规律变换，Lagrange 函数就不一定保持不变，即一般地

$$L(\phi'(x),\ \partial_\mu \phi'(x)) \neq L(\phi(x),\ \partial_\mu \phi(x)). \tag{11.4.5}$$

人们设想，宇宙是这样的和谐，内部空间是这样的对称，以致物理系统，因而描述它的 Lagrange 函数不仅在整体规范变换下不变，而且在定域规范变换下也是不变的。由于 $\theta^\alpha$ 与 x 无关仅是 $\theta^\alpha$ 与 x 有关的一个特殊情况，整体规范不变性仅是定域规范不变性的一个特例，应该把整体规范变换下不变的 Lagrange 函数推广到定域规范不变。

如上所述，整体规范不变的 Lagrange 函数在定域规范变换下不再保持不变，原因在于场量的导数 $\partial_\mu \phi(x)$ 和场量 $\phi(x)$ 在整体规范变换下按同样规律变换，而在定域规范变换下却不再按同一规律变换了。由此看来，如果我们把导数 $\partial_\mu$ 换成某种协变导数 $D_\mu$，把场量的导数 $\partial_\mu \phi(x)$ 换成场量的协变导数 $D_\mu \phi(x)$，并且要求场量的协变导数 $D_\mu \phi(x)$ 和场量 $\phi(x)$ 按同样规律变换，即

$$D_\mu \phi(x) \to D'_\mu \phi'(x) = \exp[-i\theta^\alpha(x) T_\alpha] D_\mu \phi(x), \tag{11.4.6}$$

那么，由它们构成的Lagrange函数 $L(\phi(x),\ D_\mu \phi(x))$ 就将是定域规范不变的：

$$L(\phi'(x),\ D'_\mu \phi'(x)) = L(\phi(x),\ D_\mu \phi(x)). \tag{11.4.7}$$

杨振宁和 R. L. Mills[45] 最先提出这种思想并成功地解决了这个问题。通常称之为杨振宁-Mills理论。而将 $\partial_\mu$ 换成 $D_\mu$ 的办法称

为 Y-M 最小耦合原理．于是，问题归结为如何去选定协变导数．由量子电动力学启示，按照杨-Mills 的观点，可引进规范场势 $\mathcal{A}_\mu^a(x)$，定义协变导数为

$$D_\mu \stackrel{\mathrm{df}}{=} \partial_\mu + \mathrm{A}_\mu(x), \tag{11.4.8}$$

这里

$$\mathrm{A}_\mu(x) = -ig\mathcal{A}_\mu^a(x)\mathrm{T}_a. \tag{11.4.9}$$

显然，这样引进的规范场 $\mathrm{A}_\mu(x)$ 和规范群是紧密相连的．相应于每一个生成元 $\mathrm{T}_a$．就有一个规范势 $\mathcal{A}_\mu^a(x)$．此外，规范场是由把导数 $\partial_\mu$ 换成协变导数 $D_\mu$ 的(11.4.8)定义的，而 $\partial_\mu$ 和 $D_\mu$ 都是四维时空的向量，这意味着 $\mathrm{A}_\mu^a(x)$ 也应是四维时空的向量，和规范场相应的规范粒子的自旋一定是1．例如，光子、中间玻色子、胶子等的自旋都是1．$g$ 是相互作用常数．

引进规范场 $\mathrm{A}_\mu(x)$ 来定义协变导数 $D_\mu$，旨在使场量的协变导数 $D_\mu\phi(x)$ 在定域规范变换下有和场量 $\phi(x)$ 同样的变换规律，从而把在整体规范变换下不变的Lagrange函数 $L(\phi(x),\partial_\mu\phi(x))$ 推广为在定域规范变换下不变的 Lagrange 函数 $L(\phi(x), D_\mu\phi(x))$．这一要求也就确定了规范势 $\mathcal{A}_\mu^a(x)$ 在规范变换下的变换规律．把(11.4.8)，(11.4.9)代入(11.4.6)式得

$$(\partial_\mu - ig\mathcal{A}'^a_\mu(x)\mathrm{T}_a)\mathrm{u}(\theta)\phi(x) = \mathrm{u}(\theta)(\partial_\mu - ig\mathcal{A}_\mu^a(x)\mathrm{T}_a)\phi(x). \tag{11.4.10}$$

由此可知

$$\mathcal{A}'^a_\mu(x)\mathrm{T}_a = \mathrm{u}(\theta)\mathcal{A}_\mu^a(x)\mathrm{T}_a\mathrm{u}^{-1}(\theta) + \frac{i}{g}\mathrm{u}(\theta)\partial_\mu\mathrm{u}^{-1}(\theta), \tag{11.4.11}$$

这就是规范势的变换规律．

在无穷小变换下，

$$\mathrm{u}(\theta) = \mathrm{I} - i\theta^a\mathrm{T}_a, \tag{11.4.12}$$

$$
\begin{aligned}
A'^{\alpha}_{\mu}\mathrm{T}_{\alpha}&=(1-i\theta^{\alpha}\mathrm{T}_{\alpha})A^{\beta}_{\mu}\mathrm{T}_{\beta}(1+i\theta^{\gamma}\mathrm{T}_{\gamma})\\
&\quad+\frac{i}{g}(1-i\theta^{\beta}\mathrm{T}_{\beta})\gamma_{\mu}(1+i\theta^{\alpha}\mathrm{T}_{\alpha})\\
&=A^{\beta}_{\mu}\mathrm{T}_{\beta}-i\theta^{\alpha}A^{\beta}_{\mu}[\mathrm{T}_{\alpha},\mathrm{T}_{\beta}]-\frac{1}{g}\partial_{\mu}\theta^{\alpha}\mathrm{T}_{\alpha}\\
&=A^{\alpha}_{\mu}\mathrm{T}_{\alpha}-i\theta^{\alpha}A^{\beta}_{\mu}if^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathrm{T}_{\gamma}-\frac{1}{g}\partial_{\mu}\theta^{\alpha}\mathrm{T}_{\alpha}\\
&=A^{\alpha}_{\mu}\mathrm{T}_{\alpha}+f^{\alpha}_{\beta\gamma}\theta^{\beta}A^{\gamma}_{\mu}\mathrm{T}_{\alpha}-\frac{1}{g}\partial_{\mu}\theta^{\alpha}\mathrm{T}_{\alpha},
\end{aligned}
\tag{11.4.13}
$$

这里只保留到$\theta^{\alpha}$的一次式，于是

$$
A'^{\alpha}_{\mu}(x)=A^{\alpha}_{\mu}(x)+f^{\alpha}_{\beta\gamma}\theta^{\beta}(x)A^{\gamma}_{\mu}(x)-\frac{1}{g}\partial_{\mu}\theta^{\alpha}(x).
\tag{11.4.14}
$$

这就是规范势在无穷小变换下的变换规律。它是与$\phi(x)$场的表示和$\mathrm{T}_{\alpha}$无关的。

仿照电磁场的(11.1.26)式，我们可按

$$
\left.\begin{aligned}
&\mathrm{F}_{\mu\nu}=D_{\mu}\mathrm{A}_{\nu}-D_{\nu}\mathrm{A}_{\mu},\\
&\mathrm{F}_{\mu\nu}=-igF^{\alpha}_{\mu\nu}\mathrm{T}_{\alpha}
\end{aligned}\right\}
\tag{11.4.15}
$$

来定义规范场强$F^{\alpha}_{\mu\nu}$。把定义$D_{\mu}$、$A_{\mu}$的(11.4.8)，(11.4.9)式代入(11.4.15)得到

$$
\begin{aligned}
-igF^{\alpha}_{\mu\nu}\mathrm{T}_{\alpha}&=(\partial_{\mu}-igA^{\alpha}_{\mu}\mathrm{T}_{\alpha})(-igA^{\beta}_{\nu}\mathrm{T}_{\beta})\\
&\quad-(\partial_{\nu}-igA^{\beta}_{\nu}\mathrm{T}_{\beta})(-igA^{\alpha}_{\mu}\mathrm{T}_{\alpha})\\
&=-ig\partial_{\mu}A^{\beta}_{\nu}\mathrm{T}_{\beta}+ig\partial_{\nu}A^{\alpha}_{\mu}\mathrm{T}_{\alpha}-g^{2}A^{\alpha}_{\mu}A^{\beta}_{\nu}[\mathrm{T}_{\alpha},\mathrm{T}_{\beta}]\\
&=-ig(\partial_{\mu}A^{\alpha}_{\nu}-\partial_{\nu}A^{\alpha}_{\mu})\mathrm{T}_{\alpha}-ig^{2}f^{\gamma}_{\alpha\beta}A^{\alpha}_{\mu}A^{\beta}_{\nu}\mathrm{T}_{\gamma},
\end{aligned}
\tag{11.4.16}
$$

由此可知

$$
F^{\alpha}_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A^{\alpha}_{\nu}-\partial_{\nu}A^{\alpha}_{\mu}+gf^{\alpha}_{\beta\gamma}A^{\beta}_{\mu}A^{\gamma}_{\nu}.
\tag{11.4.17}
$$

这就是规范场强和规范势之间的关系。和电磁场不同，多了由于

结构常数$f^{\alpha}_{\beta\gamma}\neq0$的一项。这是非Abel规范场和Abel规范场的重要差别。

从定义规范场强的(11.4.15)式来看，$F^{\alpha}_{\mu\nu}$ ($\alpha=1, 2, \cdots, N$; $\mu, \nu=1, 2, 3, 4$)的个数和生成元的个数，规范势的个数一样，也是$N$个；和规范势不同，它是时空空间的$N$个二阶反对称张量。

规范场强在规范变换下的变换规律可由它的定义式(11.4.15)和$\mathbf{A}_\mu(x)$的变换式(11.4.11)的另一形式

$$\mathbf{A}'_\mu(x)=\mathbf{u}(\theta)\mathbf{A}_\mu(x)\mathbf{u}^{-1}(\theta)+\mathbf{u}(\theta)\partial_\mu\mathbf{u}^{-1}(\theta) \tag{11.4.18}$$

来确定。由于

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'_{\mu\nu}&=D'_\mu\mathbf{A}'_\nu-D'_\nu\mathbf{A}'_\mu\\&=(\partial_\mu+\mathbf{A}'_\mu)\mathbf{A}'_\nu-(\partial_\nu+\mathbf{A}'_\nu)\mathbf{A}'_\mu\\&=(\partial_\mu+\mathbf{u}\mathbf{A}_\mu\mathbf{u}^{-1}+\mathbf{u}\gamma_\mu\mathbf{u}^{-1})(\mathbf{u}\mathbf{A}_\nu\mathbf{u}^{-1}+\mathbf{u}\partial_\nu\mathbf{u}^{-1})\\&\quad-(\partial_\nu+\mathbf{u}\mathbf{A}_\nu\mathbf{u}^{-1}+\mathbf{u}\partial_\nu\mathbf{u}^{-1})(\mathbf{u}\mathbf{A}_\mu\mathbf{u}^{-1}+\mathbf{u}\theta_\mu\mathbf{u}^{-1})\\&=\mathbf{u}[(\partial_\mu+\mathbf{A}_\mu)\mathbf{A}_\nu-(\partial_\nu+\mathbf{A}_\nu)\mathbf{A}_\mu]\mathbf{u}^{-1}\\&=\mathbf{u}(D_\mu\mathbf{A}_\nu-D_\nu\mathbf{A}_\mu)\mathbf{u}^{-1}=\mathbf{u}\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{u}^{-1},\end{aligned} \tag{11.4.19}$$

可知$\mathbf{F}_{\mu\nu}(x)$的变换规律为

$$\mathbf{F}'_{\mu\nu}(x)=\mathbf{u}(\theta)\mathbf{F}_{\mu\nu}(x)\mathbf{u}^{-1}(\theta). \tag{11.4.20}$$

在无穷小变换下

$$\mathbf{u}(\theta)=\mathbf{I}-i\theta^\alpha\mathbf{T}_\alpha, \tag{11.4.21}$$

于是(11.4.20)变为

$$F'^{\alpha}_{\mu\nu}(x)=F^{\alpha}_{\mu\nu}(x)+f^{\alpha}_{\beta\gamma}\theta^\beta F^{\gamma}_{\mu\nu}(x). \tag{11.4.22}$$

虽然，规范势伴随着协变导数进入场量$\phi(x)$的Lagrange函数$L(\phi(x), D_\mu\phi(x))$，决定了规范场和$\phi(x)$场相互作用的形式，但自由的规范场的Lagrange函数仍有待确定。确定的条件是：它应该是规范不变的。(11.4.22)表明规范场强不是规范不变的，因此要另行构造一个不变量。由(11.4.20)式得

$$\mathbf{F}'_{\mu\nu}\mathbf{F}'^{\mu\nu}=\mathbf{u}\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{u}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{F}^{\mu\nu}\mathbf{u}^{-1}=\mathbf{u}\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu}\mathbf{u}^{-1}, \tag{11.4.23}$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{F}'_{\mu\nu}\mathbf{F}'^{\mu\nu})=\mathrm{tr}(\mathbf{u}\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu}\mathbf{u}^{-1})=\mathrm{tr}(\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu}). \tag{11.4.24}$$

这表明迹 $\mathrm{tr}(\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu})$ 是规范不变的，可用来构成规范场的 Lagrange 函数。由于

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu})&=\mathrm{tr}[(-igF^{\alpha}_{\mu\nu}\mathbf{T}_{\alpha})(-igF^{\mu\nu\beta}\mathbf{T}_{\beta})]\\&=-g^2F^{\alpha}_{\mu\nu}F^{\mu\nu\beta}\mathrm{tr}(\mathbf{T}_{\alpha}\mathbf{T}_{\beta})\\&=-g^2F^{\alpha}_{\mu\nu}F^{\mu\nu\beta}T(R)\delta_{\alpha\beta}\\&=-g^2T(R)F_{\mu\nu\alpha}F^{\mu\nu\alpha},\end{aligned} \tag{11.4.25}$$

$T(R)$ 是常数，故 $F_{\mu\nu\alpha}F^{\mu\nu\alpha}$ 也是规范不变的。所以仿照电磁场，我们可以令规范场的自由 Lagrange 函数为

$$L_F=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu\alpha}, \tag{11.4.26}$$

上式不包含 $A^{\alpha}_{\mu}(\mathbf{x})$ 的平方项，也不可以把平方项加入上式，因为它是破坏规范不变性的。可是场量的平方项是反映相应粒子的质量的，没有 $A^{\alpha}_{\mu}(\mathbf{x})$ 的平方项，就意味着规范场没有质量。光子是没有质量的，没有 $A^{\alpha}_{\mu}(\mathbf{x})$ 的平方项的理论符合客观实际。然而，中间玻色子是有质量的，没有 $A^{\alpha}_{\mu}(\mathbf{x})$ 的平方项的理论就不能满足实际的要求。如何使规范粒子获得质量呢？人们寄期望于对称性的破缺，求助于 Higgs 场。这就是后面两节的课题。

## §11.5 Higgs 场的破缺对称性

人们把 Lagrange 函数为

$$L_\phi=-\frac{1}{2}\partial_\sigma\phi^+\partial^\sigma\phi-\frac{\mu^2}{2}\phi^+\phi-\frac{\lambda}{4}(\phi^+\phi)^2, \tag{11.5.1}$$

$\mu^2<0$，$\lambda>0$ 的场 $\phi(\mathbf{x})$ 叫做Higgs场。它在内部空间可能有多个分量。但是，它在时空空间中却只有一个分量，因而也称之为标量场，与之相应的粒子的自旋为零。它和通常的标量场不同，$\mu^2<0$，且有自相互作用，$\lambda\neq0$。

为了便于阐明 Higgs 场的特点，我们先讨论它在内部空间只有一个分量的情况。这时(11.5.1)式变为：

$$L_\phi=-\frac{1}{2}\partial_\sigma\phi\partial^\sigma\phi-\frac{\mu^2}{2}\phi^2-\frac{\lambda}{4}\phi^4. \qquad (11.5.2)$$

显然，它在内部空间的反射变换 $\phi(x)\to-\phi(x)$ 下是不变的。换句话说，它在内部空间具有反射对称性。

可是，它的真空态却不具有这种对称性。真空态就是能量最低态。场的 Hamilton 密度就是场的能量密度。把 $\phi(x)$ 看成场的广义坐标，它的广义动量按定义和(11.5.2)式就是

$$\pi(x)=\frac{\partial L_\phi}{\partial\dot{\phi}(x)}=\dot{\phi}(x), \qquad (11.5.3)$$

它的 Hamilton 密度就是

$$\begin{aligned}H(x)&=\pi(x)\dot{\phi}(x)-L(x)\\&=\frac{1}{2}\pi^2(x)+\frac{1}{2}(\nabla\phi(x))^2+\frac{\mu^2}{2}\phi^2+\frac{\lambda}{4}\phi^4. \qquad (11.5.4)\end{aligned}$$

由于出现在上式中的场量的时空导数 $\partial_\mu\phi$ 都是平方项，而且系数为正，所以，能量最小的条件为 $\phi(x)=$常数$=\phi_0$，且使

$$V(\phi)=\frac{\mu^2}{2}\phi^2+\frac{\lambda}{4}\phi^4 \qquad (11.5.5)$$

取最小值，即

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dV}{d\phi}=\mu^2\phi+\lambda\phi^3=0,\\&\frac{d^2V}{d\phi^2}=\mu^2+3\lambda\phi^2>0.\end{aligned}\right\} \qquad (11.5.6)$$

由此可知，Higgs 场的能量最低态，即真空态为

$$\phi_0^2=-\frac{\mu^2}{\lambda}, \qquad (11.5.7)$$

$$\phi_0=+\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad 或 \quad \phi_0=-\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}. \tag{11.5.8}$$

我们认定其中一个值，例如

$$\phi_0=\langle|\phi|\rangle_0=v=+\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \tag{11.5.9}$$

为 Higgs 场的真空态。此时，场的能量为

$$E_0=V_0=-\frac{\mu^4}{4\lambda}. \tag{11.5.10}$$

显然，在内部空间的反射变换下，$\phi_0\to-\phi_0$，即一种真空变为另一种真空。换句话说，选定的真空(11.5.9)式，在内部空间反射变换下不是不变的，而是破缺的。我们称这样的对称性为真空对称自发破缺，或叫做**自发破缺对称性**。这里 $\mu^2<0$ 意味着相应的粒子的质量是虚的，虚质量粒子可能以超光速运动。由此可见，以(11.5.2)式描述的 Higgs 场在内部空间反射变换下 Lagrange 函数是对称的，真空是破缺的，相应的粒子的质量是虚的，这是 Higgs 场的一方面的特点。

Higgs 场还有另一方面的特点。我们把 Higgs 场作一平移，即由

$$\phi(x)=\phi'(x)+v \tag{11.5.11}$$

定义一个新的场 $\phi'(x)$。由于 $\phi_0=v$，所以 $\phi'(x)$ 的真空态为 $\phi'_0=0$，即 $\langle|\phi'(x)|\rangle=0$。显然，这样的真空在内部空间的反射变换 $\phi'(x)\to-\phi'(x)$ 下是不变的，它具有在内部空间的反射对称性。

把(11.5.11)代入(11.5.2)得新 Higgs 场 $\phi'(x)$ 的 Lagrange 函数

$$L_{\phi'}=-\frac{1}{2}\partial_\sigma\phi'\partial^\sigma\phi'+\mu^2\phi'^2-\lambda v\phi'^3-\frac{\lambda}{4}\phi'^4+\frac{\mu^4}{4\lambda}. \tag{11.5.12}$$

由于第三项的存在，它在内部空间的反射变换 $\phi'(x)\to-\phi'(x)$ 下不再是不变的。我们说它是破缺的。而且，第二项表明 Higgs 粒子的质量

$$\frac{m^2}{2}=-\mu^2,\ m=\sqrt{-2\mu^2} \tag{11.5.13}$$

是实的。它和通常的质量概念是一致的。

由此可见，由(11.5.12)描述的 Higgs 场 $\phi'(x)$，在内部空间反射变换下，真空是对称的，Lagrange 函数却是破缺的；相应的粒子的质量是实的。这是以(11.5.2)式描述的 Higgs 场的另一方面的特点，因此，我们说 Higgs 场具有两面性。

下面，我们进一步讨论 Higgs 场的性质和 Higgs 场破缺的程度。为此，我们讨论比较一般的情况。设想 Higgs 场在内部空间有 $n$ 个实分量（一个复分量包括两个实分量）。令

$$\phi(x)=\begin{pmatrix}\phi_1(x)\\ \phi_2(x)\\ \vdots\\ \phi_n(x)\end{pmatrix}, \tag{11.5.14}$$

则

$$\phi^+(x)\phi(x)=\phi_1^2(x)+\phi_2^2(x)+\cdots+\phi_n^2(x). \tag{11.5.15}$$

Lagrange 函数为

$$L=-\frac{1}{2}(\partial_\sigma\phi^+\partial^\sigma\phi)-\frac{\mu^2}{2}(\phi^+\phi)-\frac{\lambda}{4}(\phi^+\phi)^2. \tag{11.5.16}$$

显然，它在 $n$ 维内部空间的转动下是不变的。或者说，它在内部空间具有旋转对称性，即球对称性。

实 $n$ 维空间的转动，可以用 $SO(n)$ 群来实现。$SO(n)$ 群的基本表示是 $n\times n$、实正交、归一的矩阵。它有 $n^2$ 个元素。由于有 $n(n-1)/2$ 个正交条件和 $n$ 个归一条件，独立的元素只有 $n^2-n(n-1)/2-n=n(n-1)/2$ 个。正是这个原因，$SO(n)$ 群有

$n(n-1)/2$个群参数，有$N=n(n-1)/2$个生成元。这些生成元的基本表示可写成

$$\mathsf{L}_{\alpha\beta}=-i(\mathsf{E}_{\alpha\beta}-\mathsf{E}_{\beta\alpha}),\quad \alpha,\ \beta=1,2,\cdots,n. \tag{11.5.17}$$

这里$\mathsf{E}_{\alpha\beta}$是$n\times n$矩阵，它的矩阵元是

$$(L_{\alpha\beta})_{\gamma\delta}=\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}, \tag{11.5.18}$$

而群的元素

$$\mathsf{u}(\theta)=\exp[-i\theta^{\alpha\beta}\mathsf{L}_{\alpha\beta}]. \tag{11.5.19}$$

在这个群变换下，Higgs 场的变换为

$$\boldsymbol{\phi}'(\mathsf{x})=\mathsf{u}(\theta)\boldsymbol{\phi}(\mathsf{x}), \tag{11.5.20}$$

$$\boldsymbol{\phi}'^{+}(\mathsf{x})\boldsymbol{\phi}'(\mathsf{x})=\boldsymbol{\phi}^{+}(\mathsf{x})\mathsf{u}^{+}(\theta)\mathsf{u}(\theta)\boldsymbol{\phi}(\mathsf{x})=\boldsymbol{\phi}^{+}(\mathsf{x})\boldsymbol{\phi}(\mathsf{x}), \tag{11.5.21}$$

因而(11.5.16)是不变的。

依照前面的讨论，从(11.5.16)式推知 Higgs 场在

$$\boldsymbol{\phi}^{+}\boldsymbol{\phi}=\phi_1^2+\phi_2^2+\cdots+\phi_n^2=\mathsf{v}^2=-\frac{\mu^2}{\lambda} \tag{11.5.22}$$

时取能量最低态。换句话说，它的真空态是

$$\boldsymbol{\phi}_0=\langle|\boldsymbol{\phi}(\mathsf{x})|\rangle_0=\mathsf{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \tag{11.5.23}$$

其中

$$\mathsf{v}^2=\mathsf{v}^{+}\mathsf{v}=v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2=-\frac{\mu^2}{\lambda}.$$

在$v$维内部空间中以$v=\sqrt{-\mu^2/\lambda}$为半径的球面上它取(无限多个)真空值。如果我们以$\phi_1(\mathsf{x})$，$\phi_2(\mathsf{x})$，$\cdots$，$\phi_n(\mathsf{x})$为$n$维空间的坐标轴（见图11-1）且把真空取在$\phi_n$轴上，即令

$$\phi_0=\langle|\phi(x)|\rangle_0=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\v\end{bmatrix},\tag{11.5.24}$$

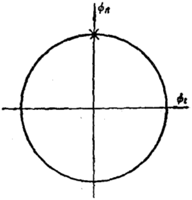


图 11-1

显然，这样的真空在$SO(n)$群的转动下不是不变的，即发生了真空自发破缺。

为了进一步分析真空破缺的情况，我们把(11.5.17)、(11.5.18)表示的生成元$E_{\alpha\beta}$分成两组$l_{\alpha\beta}$和$K_\alpha$:

$$l_{\alpha\beta}=-i(E_{\alpha\beta}-E_{\beta\alpha}),\quad \alpha,\ \beta=1,2,\cdots,n-1,\tag{11.5.25}$$

$$K_\alpha=-i(E_{\alpha n}-E_{n\alpha}),\quad \alpha=1,2,\cdots,n-1.\tag{11.5.26}$$

显然，

$$l_{\alpha\beta}\phi_0=l_{\alpha\beta}\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\v\end{bmatrix}=0,\ K_\alpha\phi_0=K_\alpha\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\v\end{bmatrix}\neq0\tag{11.5.27}$$

从而

$$\exp[-i\theta^{\alpha\beta}l_{\alpha\beta}]\phi_0=\phi_0,\tag{11.5.28}$$

$$\exp[-i\theta^{\alpha}K_{\alpha}]\phi_0\neq\phi_0.\tag{11.5.29}$$

这表明，由$(n-1)(n-2)/2$个生成元$l_{\alpha\beta}$生成的变换仍然保持真空不变，破坏真空对称的只是$(n-1)$个生成元$K_\alpha$。

把上述的真空态$\phi_0$和生成元$L_{\alpha\beta}$作一相似变换，那么真空态和生成元的表示形式将不同，但把保持真空不变的和破坏真空对称的生成元区分开来的性质仍然存在。而且，这种性质还可以推广到一般情况。所以，在一般情况下，我们可以用

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{11.5.30}$$

来表示 Higgs 场的真空态向量，用

$$\mathbf{L}_\alpha, \quad \alpha=1,2,\cdots,N \tag{11.5.31}$$

表示规范变换群的生成元，其中

$$\mathbf{l}_\beta, \quad \beta=1,2,\cdots,M \tag{11.5.32}$$

满足

$$\mathbf{l}_\beta\mathbf{v}=0, \tag{11.5.33}$$

是保持真空不变的生成元，而

$$\mathbf{K}_\gamma, \quad \gamma=1,2,\cdots,N-M \tag{11.5.34}$$

满足

$$\mathbf{K}_\gamma\mathbf{v}\neq 0, \tag{11.5.35}$$

是破坏真空对称的生成元。可以证明，保持真空不变的生成元生成的群元素构成子群。我们称之为**对称子群**（保持Higgs 场对称的子群），而$\mathbf{K}_\beta(\beta=1,2,\cdots,N-M)$生成的群元素形成相应的陪集，称为**破缺陪集**（破坏 Higgs 场对称的陪集）。有时也把$\mathbf{l}_\alpha$叫做**对称生成元**，而把$\mathbf{K}_\beta$叫做**破缺生成元**。

在上面讨论中，$\mathbf{v}$ 是真空态向量，而 $\mathbf{K}_\beta\mathbf{v}\neq 0(\beta=1,2,\cdots,N-M)$是 $N-M$ 个新的态向量，它们和真空态向量相互正交，且自身之间又线性独立。下面还将证明，它们是质量算子对应于特征值为零的特征向量。事实上，由于 $\mathbf{K}_\beta$ 的矩阵元是纯虚、反对称的，即$(\mathbf{K}_\beta)_{ij}=-(\mathbf{K}_\beta)_{ji}$，因而

$$(\mathbf{v},\ \mathbf{K}_\beta\mathbf{v})=v^i(K_\beta)_{ij}v^j=\frac{1}{2}v^iv^j[(K_\beta)_{ij}+(K_\beta)_{ji}]=0, \tag{11.5.36}$$

这表明$\mathbf{K}_\beta\mathbf{v}$与$\mathbf{v}$正交。令

$$A_{\alpha\beta}=(\mathsf{K}_\alpha\mathsf{v},\ \mathsf{K}_\beta\mathsf{v})=(\mathsf{v},\ \mathsf{K}_\alpha\mathsf{K}_\beta\mathsf{v}),\tag{11.5.37}$$

由于 v 是实向量，$\mathsf{K}_\alpha$是厄密矩阵，故$A_{\alpha\beta}$是实数，又因

$$\begin{aligned}A_{\alpha\beta}-A_{\beta\alpha}&=(\mathsf{v},\ \mathsf{K}_\alpha\mathsf{K}_\beta\mathsf{v})-(\mathsf{v},\ \mathsf{K}_\alpha\mathsf{K}_\beta\mathsf{v})\\&=(\mathsf{v},\ [\mathsf{K}_\alpha,\ \mathsf{K}_\beta]\mathsf{v})\\&=if^\gamma_{\alpha\beta}(\mathsf{v},\ \mathsf{L}_\gamma\mathsf{v})\\&=\sum_{\gamma_1=1}^{M}if^{\gamma_1}_{\alpha\beta}(\mathsf{v},\ \mathsf{l}_{\gamma_1}\mathsf{v})+\sum_{\gamma_2=1}^{N-M}if^{\gamma_2}_{\alpha\beta}(\mathsf{v},\ \mathsf{K}_{\gamma_2}\mathsf{v}),\end{aligned}\tag{11.5.38}$$

由于(11.5.33)式，上式第一项为零，而由于(11.5.36)，上式第二项为零。于是$A_{\alpha\beta}$关于脚标$\alpha$，$\beta$是对称的。由此可见，$A_{\alpha\beta}$是一个实的对称的矩阵的矩阵元。由矩阵代数知，实的对称矩阵总可对角化，即可找到一个正交矩阵O使

$$\mathsf{K}_\alpha\mathsf{v}\to\mathsf{O}\mathsf{K}_\alpha\mathsf{v},\tag{11.5.39}$$

而由向量$\mathsf{O}\mathsf{K}_\alpha\mathsf{v}(\alpha=1,2,\cdots,N-M)$的标积构成的矩阵元是对角化的，即

$$\tilde{A}_{\alpha\beta}=(\mathsf{O}\mathsf{K}_\alpha\mathsf{v},\ \mathsf{O}\mathsf{K}_\beta\mathsf{v})=A_{\underline{\alpha}}\delta_{\underline{\alpha}\beta},\tag{11.5.40}$$

这里下标$\alpha$下 面加杠表示对该对指标不求和。(11.5.40)表明，$N-M$个向量$\mathsf{O}\mathsf{K}_\alpha\mathsf{v}$是相互正交的，因而，与它们由一正交变换联系的$N-M$个向量$\mathsf{K}_\alpha\mathsf{v}(\alpha=1,2,\cdots,\ N-M)$是线性无关的。

我们进一步讨论$\mathsf{K}_\alpha\mathsf{v}$与质量算子的关系，设 Higgs 场$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$的 Lagrange 函数为

$$L=-\ \frac{1}{2}\partial_\mu\boldsymbol{\phi}^+\partial^\mu\boldsymbol{\phi}-V(\boldsymbol{\phi}).\tag{11.5.41}$$

在无穷小变换下，

$$\mathsf{u}(\theta)=\exp[-i\theta^\alpha\mathsf{L}_\alpha]\simeq\mathsf{I}-i\theta^\alpha\mathsf{L}_\alpha,\tag{11.5.42}$$

$$\delta\boldsymbol{\phi}=-i\theta^\alpha\mathsf{L}_\alpha\boldsymbol{\phi},\tag{11.5.43}$$

$$\delta\phi_\alpha=-i\theta^\beta L^\gamma_{\beta\alpha}\phi_\gamma,\tag{11.5.44}$$

而$L$是不变的，因而$V(\phi)$也是不变的，即

$$\delta V=\frac{\partial V}{\partial\phi_\alpha}\delta\phi_\alpha=-i\theta^\beta\frac{\partial V}{\partial\phi_\alpha}L^\gamma_{\beta\alpha}\phi_\gamma=0. \qquad (11.5.45)$$

由于$\theta^\beta$的任意性，所以

$$\frac{\partial V}{\partial\phi_\alpha}L^\gamma_{\beta\alpha}\phi_\gamma=0. \qquad (11.5.46)$$

将上式对$\phi_\delta$微分得

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_\delta\partial\phi_\alpha}L^\gamma_{\beta\alpha}\phi_\gamma+\frac{\partial V}{\partial\phi_\alpha}L^\delta_{\beta\alpha}=0. \qquad (11.5.47)$$

将上式中的诸量在真空态取值，即令

$$\phi_\alpha=v_\alpha,\ \left.\frac{\partial V}{\partial\phi_\alpha}\right|_{\phi=v}=0,\ \left.\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_\delta\partial\phi_\alpha}\right|_{\phi=v}\equiv(M^2)^{\delta\alpha}>0 \qquad (11.5.48)$$

得到

$$(\mathbf{M}^2)^{\delta\alpha}L^\gamma_{\beta\alpha}\phi_\gamma=0, \qquad (11.5.49)$$

它的矩阵形式为

$$\mathbf{M}^2\mathbf{L}_\beta\mathbf{v}=0. \qquad (11.5.50)$$

如前所述，在$N$个生成元$\mathbf{L}_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,N)$中，有$M$个对称生成元$\mathbf{l}_\beta(\beta=1,2,\cdots,M)$和$N-M$个破缺生成元$\mathbf{K}_\gamma(\gamma=1,2,\cdots,N-M)$。因而在(11.5.50)中的$N$个方程中有

$$\mathbf{M}^2\mathbf{l}_\beta\mathbf{v}=0,\ \mathbf{l}_\beta\mathbf{v}=0,\quad(\beta=1,2,\cdots,M) \qquad (11.5.51)$$

和

$$\mathbf{M}^2\mathbf{K}_\gamma\mathbf{v}=0,\ \mathbf{K}_\gamma\mathbf{v}\neq0,\quad(\gamma=1,2,\cdots,N-M). \qquad (11.5.52)$$

(11.5.51)式的$M$个方程没有提供新的信息。由矩阵$\mathbf{M}^2$的定义式(11.5.48)知$(\mathbf{M}^2)^{\delta\alpha}$就是$V$中二次项$\phi_\delta\phi_\alpha$的系数，因而是$\phi(x)$场的质量平方算子的矩阵元，即$\mathbf{M}^2$是$\phi(x)$场的质量平方算子。(11.5.52)表明态向量$\mathbf{K}_\gamma\mathbf{v}\neq0$正是算子$\mathbf{M}^2$的特征值为零的特征向量。前面已经证明，$N-M$个态向量$\mathbf{K}_\gamma\mathbf{v}$是线性独立的。由此可

知，$M^2$有 $N-M$ 个（等于破缺生成元的数目）等于零的特征值。总而言之，我们有

**Goldstone 定理** 与 $N-M$ 个破缺生成元相应存在着 $N-M$ 个质量为零的标量粒子。这种粒子叫 Goldstone 粒子。

下面我们将场 $\boldsymbol{\phi}(x)$进行参数化。既然 $\mathbf{K}_\gamma \mathbf{v}(\gamma=1, 2, \cdots, N-M)$是与$\mathbf{v}$正交的、线性无关的向量而$\boldsymbol{\phi}$场又有$n$个独立的分量，那么$\mathbf{v}$就是有$n-(N-M)$个独立分量的向量。我们令$\boldsymbol{\eta}(x)$是与$\mathbf{v}$平行的向量，则$\mathbf{K}_a\mathbf{v}$，$\mathbf{K}_a\boldsymbol{\eta}$就是与$\mathbf{v}$、$\boldsymbol{\eta}$正交的向量，它们是线性无关的，而且可以按(11.5.40)式正交化。为了讨论方便，假设它们已经正交化了，即令

$$(\mathbf{K}_\alpha \mathbf{v},\ \mathbf{K}_\beta \mathbf{v})=A_{\underline{\alpha}}\delta_{\underline{\alpha}\beta}. \tag{11.5.53}$$

再令$\xi^\alpha(x)$是沿$\mathbf{K}_\alpha\mathbf{v}$方向的场分量。那么，就可以用$\boldsymbol{\eta}(x)$，$\xi^\alpha(x)$ $(\alpha=1,2,\cdots,N-M)$来取代场量$\boldsymbol{\phi}(x)$中的$n$个独立的分量，并写成

$$\boldsymbol{\phi}(x)=\exp\left[\frac{i\xi^\alpha(x)\mathbf{K}_\alpha}{|\mathbf{v}|}\right](\mathbf{v}+\boldsymbol{\eta}(x)), \tag{11.5.54}$$

指数中的$|\mathbf{v}|$是向量$\mathbf{v}$的模。场量的这种表示叫做参数化。

由(11.5.54)式得到

$$\boldsymbol{\phi}^+(x)=(\mathbf{v}^++\boldsymbol{\eta}^+(x))\exp\left[-\frac{i\xi^\alpha(x)\mathbf{K}_\alpha}{|\mathbf{v}|}\right], \tag{11.5.55}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}^+(x)\boldsymbol{\phi}(x)&=(\mathbf{v}^++\boldsymbol{\eta}^+(x))(\mathbf{v}+\boldsymbol{\eta}(x))\\&=\mathbf{v}^+\mathbf{v}+\boldsymbol{\eta}^+(x)\boldsymbol{\eta}(x)+\mathbf{v}^+\boldsymbol{\eta}(x)+\boldsymbol{\eta}^+(x)\mathbf{v},\end{aligned} \tag{11.5.56}$$

$$\begin{aligned}\partial^\mu\boldsymbol{\phi}(x)=&\exp\left[\frac{i\xi^\alpha(x)\mathbf{K}_\alpha}{|\mathbf{v}|}\right]i\partial^\mu\xi^\beta(x)\frac{\mathbf{K}_\beta}{|\mathbf{v}|}(\mathbf{v}+\boldsymbol{\eta}(x))\\&+\exp\left[\frac{i\xi^\alpha(x)\mathbf{K}_\alpha}{|\mathbf{v}|}\right]\partial^\mu\boldsymbol{\eta}(x),\end{aligned} \tag{11.5.57}$$

$$\partial_\mu \phi^+(x) = (v^+ + \eta^+(x))\left(-i + \partial_\mu \xi^\alpha(x) \frac{K_\alpha}{|v|}\right)$$

$$\cdot \exp\left[-i \frac{\xi^\beta(x) K_\beta}{|v|}\right]$$

$$+ \partial_\mu \eta^+(x) \exp\left[-\frac{i\xi^\alpha(x) K_\alpha}{|v|}\right], \qquad (11.5.58)$$

$$\partial_\mu \phi^+(x) \partial^\mu \phi(x) = \partial_\mu \eta^+(x) \partial^\mu \eta(x) + \partial_\mu \xi^\alpha(x) \partial^\mu \xi^\beta(x) \delta_{\alpha\beta}$$

$$+ \partial_\mu \eta^+(x) i \partial^\mu \xi^\alpha(x) \frac{K_\alpha}{|v|}(v + \eta(x))$$

$$-i(v^+ + \eta^+(x)) \partial_\mu \xi^\alpha(x) \frac{K_\alpha}{|v|} \partial^\mu \eta(x). \qquad (11.5.59)$$

把它们代入(11.5.16)式得到

$$L = -\frac{1}{2}[\partial_\mu \eta^+(x) \partial^\mu \eta(x) + \partial_\mu \xi^\alpha(x) \partial^\mu \xi^\beta(x) \delta_{\alpha\beta}$$

$$+ \frac{i}{|v|} \partial_\mu \eta^+(x) \partial^\mu \xi^\alpha(x) K_\alpha (v + \eta(x))$$

$$- \frac{i}{|v|}(v^+ + \eta^+(x)) \partial_\mu \xi^\alpha(x) K_\alpha \partial^\mu \eta(x)]$$

$$- \frac{\mu^2}{2}[v^2 + v^+ \eta(x) + \eta^+(x) v + \eta^+(x) \eta(x)]$$

$$- \frac{\lambda}{4}[v^2 + v^+ \eta(x) + \eta^+(x) v + \eta^+(x) \eta(x)]^2,$$

$$(11.5.60)$$

这就是参数化以后，用新场$\eta(x)$，$\xi^\alpha(x)$表示的 Lagrange 函数。显然，它们在规范群变换下不再具有不变性。由(11.5.54)式可知，由于$\phi(x)$场的真空值是v，新场$\eta(x)$，$\xi^\alpha(x)$的真空就是零。因而在规范群变换下真空是不变的。由此可知，用(11.5.60)式描述的Higgs场，在规范变换下，真空是对称的，而Lagrange

函数却是破缺的。而且，$\eta(x)$场的质量为$\sqrt{-\mu^2}$是实的，$\xi^a(x)$场的质量为零。$\xi^a(x)$场的数目与破缺生成元数目相同，也就是说质量为零的标量场的数目与破缺生成元的数目相等，即Goldstone粒子的数目与破缺生成元的数目相等，这正是 Goldstone 定理的具体表现。

## §11.6 Higgs 机制

由于规范不变性的要求，在规范场的 Lagrange 函数中不能有二次方项，使规范粒子没有质量。这样的理论不能用来描述有质量的中间玻色子。Higgs 场具有破缺对称性，和每一个破缺生成元相应，就有一个 Goldstone 粒子。然而，没有质量的自旋为零的粒子，在自然界是不存在的。没有质量的规范粒子和没有质量的 Goldstone 粒子，常常是人们不喜爱的，需要从理论中除去。当人们把规范场和 Higgs 场一起考虑时，就可以达到这个目的。Goldstone 粒子会被吃掉，规范粒子会获得质量，这就是 **Higgs 机制**。

为了便于阐明 Higgs机制的基本思想，先讨论一个简单的例子。设 Higgs 场在内部空间有两个分量$\phi_1(x)$、$\phi_2(x)$，它们的 Lagrange 函数为

$$L_\phi=-\frac{1}{2}\partial_\sigma\phi_1\partial^\sigma\phi_1-\frac{1}{2}\partial_\sigma\phi_2\partial^\sigma\phi_2-\frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2+\phi_2^2)$$

$$-\frac{\lambda}{4}(\phi_1^2+\phi_2^2)^2, \qquad (11.6.1)$$

用相互共轭的复场

$$\phi(x)=\phi_1(x)+i\phi_2(x),\quad \phi^+(x)=\phi_1(x)-i\phi_2(x) \qquad (11.6.2)$$

代替实场$\phi_1(x)$，$\phi_2(x)$，则

$$L_\phi=-\frac{1}{2}\partial_\sigma\phi^+\partial^\sigma\phi-\frac{\mu^2}{2}\phi^+\phi-\frac{\lambda}{4}(\phi^+\phi)^2. \qquad (11.6.3)$$

这个场的真空态为

$$\langle|\sqrt{\phi^+\phi}\ |\rangle_0=v=\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}. \qquad (11.6.4)$$

显然，在规范变换

$$\left.\begin{array}{l}\phi(\mathbf{x})\to\exp[-i\theta]\phi(\mathbf{x}),\\ \phi^+(\mathbf{x})\to\phi^+(\mathbf{x})\exp[i\theta]\end{array}\right\} \qquad (11.6.5)$$

下，(11.6.3)式表示的 Lagrange 函数是不变的。而(11.6.4)表示的真空却由一个方向变到另一个方向，即这个场在 $U_1$ 群 $u(\theta)=\exp[-i\theta]$下是破缺对称的。这时，$\theta$是与时空坐标 $\mathbf{x}$ 无关的常数，破缺对称是**整体规范破缺**对称。

如果把(11.6.5)式表示的整体规范变换，推广到定域规范变换

$$\left.\begin{array}{l}\phi(\mathbf{x})\to\exp[-i\theta(\mathbf{x})]\phi(\mathbf{x}),\\ \phi^+(\mathbf{x})\to\phi^+(\mathbf{x})\exp[i\theta(\mathbf{x})],\end{array}\right\} \qquad (11.6.6)$$

那么，不管是(11.6.3)表示的 Lagrange 函数，还是(11.6.4)式表示的真空，都不是不变的。要使理论保持一定的对称性，就必须修改(11.6.3)式。按前面所述的杨-Mills理论，我们可以引进规范 $A_\mu(\mathbf{x})$，和引进协变导数 $D_\mu$，把(11.6.3)式中的导数换成协变导数

$$\partial_\mu\to D_\mu=\partial_\mu-ieA_\mu(\mathbf{x}), \qquad (11.6.7)$$

再加上自由规范场的部分，就得到

$$L=-\frac{1}{2}(\partial_\sigma+ieA_\sigma)\phi^+(\partial^\sigma-ieA^\sigma)\phi-\frac{\mu^2}{2}\phi^+\phi$$

$$-\frac{\lambda}{4}(\phi^+\phi)^2-\frac{1}{4}F_{\sigma\nu}F^{\sigma\nu}, \qquad (11.6.8)$$

其中

$$F_{\sigma\nu}=\partial_\sigma A_\nu-\partial_\nu A_\sigma. \qquad (11.6.9)$$

这就是修改后的 Lagrange 函数。它包括 Higgs 场和规范场及其相互作用。显然，在(11.6.6)表示的 Higgs 场的变换和规范场的变换

$$A_\mu(\mathbf{x})\to A_\mu(\mathbf{x})-\frac{1}{e}\partial_\mu\theta(\mathbf{x}) \qquad (11.6.10)$$

下是不变的。而(11.6.4)表示的 Higgs 场的真空，在这变换下却仍要改变方向。这就是(11.6.8)表示的理论的**定域规范破缺**对称性。

上述的 Higgs 场有两个实分量 $\phi_1(\mathbf{x})$ 和 $\phi_2(\mathbf{x})$。我们如果不按(11.6.2)式表示 $\phi(\mathbf{x})$，而沿真空态向量 $\mathbf{v}$ 的方向引进实场 $\eta(\mathbf{x})$，沿垂直于真空态向量 $\mathbf{v}$ 的方向引进实场 $\xi(\mathbf{x})$，按照参数化

$$\left.\begin{aligned}\phi(\mathbf{x})&=\exp\left[\frac{i\xi(\mathbf{x})}{|v|}\right](v+\eta(\mathbf{x})),\\ \phi^+(\mathbf{x})&=\exp\left[-\frac{i\xi(\mathbf{x})}{|v|}\right](v+\eta(\mathbf{x}))\end{aligned}\right\} \qquad (11.6.11)$$

的方式表示 $\phi(\mathbf{x})$，那么，由于(11.6.4)式，新场的真空值就是零了，即

$$\langle|\eta(\mathbf{x})|\rangle_0=0, \quad \langle|\xi(\mathbf{x})|\rangle_0=0. \qquad (11.6.12)$$

而由(11.6.8)表示的 Lagrange 函数变为

$$\begin{aligned}L=&-\frac{1}{2}(\partial_\sigma+ieA_\sigma)\exp\left[-i\frac{\xi(\mathbf{x})}{|v|}\right](v+\eta(\mathbf{x}))(\partial^\sigma-ieA^\sigma)\\ &\cdot\exp\left[i\frac{\xi(\mathbf{x})}{|v|}\right](v+\eta(\mathbf{x}))-\frac{\mu^2}{2}(v+\eta(\mathbf{x}))^2\\ &-\frac{\lambda}{4}(v+\eta(\mathbf{x}))^4-\frac{1}{4}F_{\sigma\nu}F^{\sigma\nu}\end{aligned}$$

$$=-\frac{1}{2}\partial_\sigma\eta\partial^\sigma\eta-\frac{1}{2}\partial_\sigma\xi\partial^\sigma\xi+\mu^2\eta^2-\frac{1}{2}e^2v^2A_\sigma A^\sigma$$

$$+evA^\sigma\partial_\sigma\xi-\frac{1}{4}F_{\sigma\nu}F^{\sigma\nu}+\text{三次方以上项}, \quad (11.6.13)$$

显然，在(11.6.6)和(11.6.10)表示的规范变换下，(11.6.12)表示的真空是不变的，而(11.6.13)表示的运动规律就不再是不变的了。这就是定域规范破缺对称的又一种表现形式。从(11.6.13)看来，$\eta(x)$有实质量$m_\eta=\sqrt{-2\mu^2}$，规范场$A_\mu(x)$也有了质量$m_A=ev$。然而，$\xi(x)$仍然没有质量，仍然是Goldstone粒子，而且出现了$\xi(x)$和$A_\mu(x)$直接耦合的两点顶角，这是人们所不期望有的，应当设法除去。

我们利用规范自由度来达到上述目的。规范自由度是指Higgs场$\phi(x)$和规范场$A_\mu(x)$，在(11.6.6)和(11.6.10)式表示的规范变换下变成$\phi'(x)$和$A'_\mu(x)$时，(11.6.8)表示的Lagrange函数保持不变，即

$$L=-\frac{1}{2}(\partial_\sigma+ieA'_\sigma(x))\phi'^+(x)(\partial^\sigma-ieA'^\sigma(x))\phi'(x)$$

$$-\frac{\mu^2}{2}\phi'^+(x)\phi'(x)-\frac{\lambda}{4}(\phi'^+(x)\phi'(x))^2$$

$$-\frac{1}{4}F_{\sigma\nu}F^{\sigma\nu}, \quad (11.6.14)$$

这里

$$F'_{\sigma\nu}=\partial_\sigma A'_\nu-\partial_\nu A'_\sigma. \quad (11.6.15)$$

如果我们把按(11.6.11)式参数化了的$\phi(x)$和$A_\sigma(x)$一起作一个规范变换，并且令群参数$\theta(x)=\xi(x)/|v|$，即令规范变换群元素为

$$u(\theta)=u(\xi)=\exp\left[-i\frac{\xi(x)}{|v|}\right], \quad (11.6.16)$$

那么

$$\phi(x)\to\phi'(x)=\exp\left[-i\frac{\xi(x)}{|v|}\right]\phi(x)=v+\eta(x),\tag{11.6.17}$$

$$\phi^+(x)\to\phi'^+(x)=\exp\left[i\frac{\xi(x)}{|v|}\right]\phi^+(x)=v+\eta(x),\tag{11.6.18}$$

$$A_\sigma(x)\to A'_\sigma(x)=A_\sigma(x)-\frac{1}{e|v|}\partial_\sigma\xi(x).\tag{11.6.19}$$

把上面各式代入(11.6.14)式中得到

$$\begin{aligned}L=&-\frac{1}{2}(\partial_\sigma+ieA'_\sigma(x))(v+\eta(x))(\partial^\sigma\\&-ieA'^\sigma(x))(v+\eta(x))\\&-\frac{\mu^2}{2}(v+\eta(x))^2-\frac{\lambda}{4}(v+\eta(x))^4-\frac{1}{4}F'_{\sigma\nu}F'^{\sigma\nu}\\=&-\frac{1}{2}\partial_\sigma\eta\partial^\sigma\eta+\mu^2\eta^2-\lambda v\eta^3-\frac{\lambda}{4}\eta^4\\&-\frac{1}{2}e^2A'^2_\sigma\eta(2v+\eta)-\frac{1}{2}e^2v^2A'_\sigma A'^\sigma-\frac{1}{4}F'_{\sigma\nu}F'^{\sigma\nu},\end{aligned}\tag{11.6.20}$$

这里，$\xi(x)$场不见了，Goldstone 粒子和两点耦合方式除去了。从(11.6.19)看来，$\xi(x)$场成了$A'_\sigma(x)$场的纵分量，Goldstone 粒子被规范粒子吃掉了。而吃了 Goldstone 粒子的规范粒子，从(11.6.20)式的第二项看，就由无质量变成有质量了，而且它的质量$m_{A'}=e|v|$。再者，剩下的 Higgs 粒子$\eta(x)$，也成为有质量$m_\eta=\sqrt{-2\mu^2}$的实粒子了。当然，(11.6.20)式表示的运动规律不再是规范对称的。但 Higgs 场的真空$\langle|\eta(x)|\rangle_0=0$却仍是规范对称的。这是 Higgs 场的又一种表现形式。

为了进一步理解 Higgs 机制，我们讨论更一般的情况。设

Higgs 场 $\phi(x)$有$N$个实分量 $\phi_a(x)$，$a=1,2,\cdots,N$. Lagrange函数为

$$L=-\frac{1}{2}\partial_\sigma\phi^+(x)\cdot\partial^\sigma\phi(x)-V(\phi). \qquad (11.6.21)$$

它的真空态向量为

$$\langle|\sqrt{\phi^+(x)\phi(x)}|\rangle_0=v\neq 0. \qquad (11.6.22)$$

在 $N$ 维群

$$u(\theta)=\exp[-i\theta^a L_a], \quad a=1,2,\cdots,N \qquad (11.6.23)$$

变换下，(11.6.21)式是不变的. 真空态是破缺的，即 $N$ 个生成元 $L_a$ 中，$M$ 个生成元 $l_\beta$ 保持真空不变

$$l_\beta v=0, \qquad (11.6.24)$$

$N-M$ 个生成元 $K_\gamma$ 使真空发生变化

$$K_\gamma v\neq 0. \qquad (11.6.25)$$

这是 $\theta^a$ 与时空坐标 x 无关时的整体规范变换的情况.

当(11.6.23)式中的 $\theta^a$ 与时空坐标 x 有关时，即在定域规范变换的情况下，Higgs 场的真空仍保持如上所述的特点，它的破缺情况仍由(11.6.24)和(11.6.25)式描写. 但 Higgs 场 的 Lagrange 函数(11.6.21)式就要进行修改. 设由 $N$ 个 生 成 元 $L_a$ 相应引进的 $N$ 个规范场为 $A_\mu^a(x)$，用协变导数$D_\mu=\partial_\mu-igA_\mu^a(x)L_a$代替(11.6.21)式中的导数，并加上自由规范场部分就得到 所 需要的 Lagrange 函数

$$L=-\frac{1}{2}\phi^+(x)(\overleftarrow{\partial}_\mu+igA_\mu^a(x)L_a)(\partial^\mu-igA^{\mu\beta}L_\beta)\phi(x)$$

$$-V(\phi)-\frac{1}{4}F_{\mu\nu a}F^{\mu\nu a}. \qquad (11.6.26)$$

(这里 $\overleftarrow{\partial}_\mu$ 上面的箭头表示对该符号左边的量求导，下同)，在规范群(11.6.23)的变换下(11.6.26) 是不变的，不管 $\theta^a$ 是 否与 x 有关都是如此.

(11.6.26)式描述的规范场和 Higgs 场仍是不能令人满意的。规范场粒子还没有质量，Higgs 场粒子的质量也还是虚的。为了得到满意的理论，仿照前面的办法，还要把 Higgs 场**参数化**，并选取**幺正规范**。参数化就是用平行于真空态向量的分量 $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$ 和垂直于真空态向量的分量 $\xi^a(\mathbf{x})$ 来作为 Higgs 场 $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$ 在内部空间的分量，并以

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})=\exp[i\xi^a(\mathbf{x})\mathbf{K}_a](\mathbf{v}+\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})) \qquad (11.6.27)$$

的形式表示出来。显然，由于 $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$ 的真空态向量是 $\mathbf{v}$，场量 $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$，$\xi^a(\mathbf{x})$ 的真空态向量就是 0，在规范变换下是不变的。幺正规范就是把参数化了的 Higgs 场(11.6.27)式和规范场一起作一次特殊的规范变换，选取规范参数 $\theta^a(\mathbf{x})=\xi^a(\mathbf{x})$ 使

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})\to\boldsymbol{\phi}'(\mathbf{x})=\exp[-i\xi^a(\mathbf{x})\mathbf{K}_a]\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})=\mathbf{v}+\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}), \qquad (11.6.28)$$

$$A^a_\mu\mathbf{L}_a\to A'^a_\mu\mathbf{L}_a=\exp[-i\xi^a(\mathbf{x})\mathbf{K}_a]A^\beta_\mu\mathbf{L}_\beta\exp[i\xi^\gamma(\mathbf{x})\mathbf{K}_\gamma]$$
$$+\frac{1}{ig}\exp[-i\xi^a(\mathbf{x})\mathbf{K}_a]\partial_\mu\exp[i\xi^\beta(\mathbf{x})\mathbf{K}_\beta]. \qquad (11.6.29)$$

新的 Higgs 场只剩下和真空态向量 $\mathbf{v}$ 平行的分量了，Higgs 场的垂直于真空态向量 $\mathbf{v}$ 的分量不见了，变成了规范场的纵分量了。由于理论的规范不变性，用(11.6.28)、(11.6.29) 表示的新场代替了(11.6.26)中的旧场，即以 $\boldsymbol{\phi}'(\mathbf{x})$、$A'^a_\mu(\mathbf{x})$ 代替 $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$、$A^a_\mu(\mathbf{x})$，就得到所需要的 Lagrange 函数

$$L=-\frac{1}{2}(\mathbf{v}^++\boldsymbol{\eta}^+(\mathbf{x}))(\overleftarrow{\partial}_\mu+igA^a_\mu(\mathbf{x})\mathbf{L}_a)(\partial^\mu$$
$$-igA^{\mu\beta}(\mathbf{x})\mathbf{L}_\beta)(\mathbf{v}+\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}))$$
$$-V(\mathbf{v}+\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}))-\frac{1}{4}F_{\mu\nu a}F^{\mu\nu a}, \qquad (11.6.30)$$

式中我们已略去 $A^a_\mu(\mathbf{x})$、$F_{\mu\nu a}$ 上的(′)号。但应该注意(11.6.30)

式中的 $A_\mu^a(x)$，$F_{\mu\nu a}$ 和(11.6.26)式中的 $A_\mu^a(x)$，$F_{\mu\nu a}$ 是由(11.6.29)联系着的，它们之间差一个特殊的规范变换。

由 (11.6.30) 看，参数化和幺正规范变换的实际效果，只是以平行于真空态向量的分量 $\eta(x)+v$ 代替场量 $\phi(x)$，即

$$\phi(x)\to v+\eta(x), \tag{11.6.31}$$

这时 $\eta(x)$ 的真空态为零，是规范不变的。而(11.6.30)式表示的运动规律却是破缺对称的。

从(11.6.28)、(11.6.29)可知

$$l_a(v+\eta(x))=0,\quad K_\beta(v+\eta(x))\neq 0, \tag{11.6.32}$$

因而，在(11.6.30)中的 $A_\mu^a(x)L_a(v+\eta(x))$ 就只剩下 $A_\mu^\beta K_\beta(v+\eta(x))$ 而(11.6.30)式可以写成

$$L=-\frac{1}{2}(v^++\eta^+(x))(\overleftarrow{\partial}_\mu+igA_\mu^\beta(x)K_\beta)(\partial^\mu-igA^{\mu\gamma}K_\gamma)(v$$

$$+\eta(x))-V(v+\eta(x))-\frac{1}{4}F_{\mu\nu a}F^{\mu\nu a}, \tag{11.6.33}$$

这意味着和 $\eta(x)$ 场相互作用的，只有与破缺生成元 $K_\beta$ 相应的规范场 $A_\mu^\beta(x)$。而与对称生成元 $l_a$ 相应的规范场 $A_\mu^a(x)$，和 $\eta(x)$ 场不发生作用。

(11.6.33)的第一项可写成

$$\begin{aligned}
&(v^++\eta^+(x))(\overleftarrow{\partial}_\mu+igA_\mu^a(x)K_a)(\partial^\mu-igA^{\mu\beta}K_\beta)(v+\eta(x))\\
&=\partial_\mu\eta^+(x)\partial^\mu\eta(x)-igA^{\mu\beta}(x)\partial_\mu\eta^+(x)K_\beta(v+\eta(x))\\
&\quad+igA_\mu^a(x)(v^++\eta^+(x))K_a\partial^\mu\eta(x)\\
&\quad+g^2A_\mu^a(x)A^{\mu\beta}(x)[(K_av,\ K_\beta v)+(K_av,K_\beta\eta(x))\\
&\quad+(K_a\eta(x),\ K_\beta v)+(K_a\eta(x),\ K_\beta\eta(x))],
\end{aligned} \tag{11.6.34}$$

而第二项展开为

$$V(v+\eta(x))=V(v)+\frac{\partial V}{\partial\eta_i}\bigg|_{\eta=0}\eta_i+\frac{1}{2}\frac{\partial^2V}{\partial\eta_i\partial\eta_j}\bigg|_{\eta=0}\eta_i\eta_j$$

$$+\cdots, \tag{11.6.35}$$

式中$V(\mathbf{v})$是Higgs场的真空能量，

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \eta_i}\right|_{\eta=0}=0, \quad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \eta_i \partial \eta_j}\right|_{\eta=0}\equiv(\mathbf{M}^2)^{ij}>0, \tag{11.6.36}$$

$(\mathbf{M}^2)^{ij}$是Higgs场$\eta(x)$的质量平方矩阵元。把这些结果代入(11.6.33)式就得到

$$\begin{aligned} L= & -\frac{1}{2}\partial_\mu \eta^+ \partial^\mu \eta-\frac{1}{2}(\mathbf{M}^2)^{ij}\eta_i\eta_j-\frac{1}{4}F_{\mu\nu a}F^{\mu\nu a} \\ & -\frac{1}{2}g^2(\mathbf{K}_a\mathbf{v},\ \mathbf{K}_\beta \mathbf{v})A_\mu^a A^{\mu\beta} \\ & -\frac{1}{2}g^2(\mathbf{K}_a\eta,\ \mathbf{K}_\beta(\eta+2\mathbf{v}))A_\mu^a A^{\mu\beta} \\ & -igA_\mu^a(\mathbf{v}^++\eta^+)\mathbf{K}_a\partial^\mu\eta \\ & +igA^{\mu\beta}\partial_\mu\eta^+\mathbf{K}_\beta(\mathbf{v}+\eta)+\cdots. \end{aligned} \tag{11.6.37}$$

这表明$(\mathbf{M}^2)^{ij}$确是$\eta(x)$场的质量矩阵元，而

$$(\mathbf{M}^2)_{a\beta}\equiv g^2(\mathbf{K}_a\mathbf{v},\mathbf{K}_\beta\mathbf{v}) \tag{11.6.38}$$

却是规范场的质量平方的矩阵元。由于这矩阵元只与破缺生成元有关，所以只有和破缺生成元$\mathbf{K}_a$相应的规范场$A_\mu^a(x)$才获得质量。而与对称生成元$\mathbf{l}_\beta$相应的规范场$A_\mu^\beta(x)$，不仅与Higgs场$\eta(x)$无相互作用，而且仍然没有质量。

总之，破缺生成元$\mathbf{K}_a$在Higgs机制中，占有十分重要的作用：$\mathbf{K}_a\mathbf{v}$是Goldstone粒子对应的质量特征向量，决定了Goldstone粒子的数目等于破缺生成元的数目。参数化和幺正规范都用$\exp[i\xi^a(x)\mathbf{K}_a]$因子，消除了Goldstone粒子。$g^2(\mathbf{K}_a\mathbf{v},\ \mathbf{K}_\beta\mathbf{v})$是规范场质量矩阵元，决定了有质量的规范场的数目也等于破缺生成元的数目。对称子群$\mathbf{l}_a$保持了物理系统的部分对称性，并使相应的规范场$A_\mu^a(x)$保持没有质量。

## §11.7 Noether 对称性定理

规范场理论分为几何理论和 Lagrange 理论两大体系。一般说来，规范场的几何理论是规范场的几何化，它可以处理各种交互作用。而规范场的 Lagrange 理论是沿着经典的 Lagrange 场论的方向证明 Noether 对称性定理，从而导出各种群下的守恒律。不变（对称）性原理是现代场论的基本原则，现代数理科学的许多基本原则常常可以溯源到对称性质或者用对称性质来表达，并从对称性推出相应的守恒定律。在这方面，女数学家 E. Noether 作出了卓越的贡献[35]，她最先指出：使作用量泛函具有不变性的任一对称变换群，对应共生一个守恒定律。这个定理阐述了场在对称变换群下的不变性与守恒定律的联系，称为 **Noether 定理**。

我们知道，不变（对称）性是和下面两个因素密切联系的：时空变换群和规范变换群（在规范理论中，有时不考虑时空变换群）所组成的群偶总是与不变性相伴出现的，而 Lagrange 函数的具体结构，决定着不变性的内在形式。因此，我们将就变换群是有限群或连续群的两种情况，以及对 Lagrange 函数的一些特定形式分别作一些讨论。

首先，设时空变换群与规范变换群为

$$G_r\begin{cases} x^\mu\to x'^\mu=x'^\mu(x^\mu), & \mu=1,2,3,4, \\ \phi_a\to\phi'_a=\phi'_a(x'^\mu), & \alpha=1,2,\cdots,r. \end{cases} \tag{11.7.1}$$

如果在变换群(11.7.1)下，系统的作用量泛函 $S$ 恒满足

$$S=S', \tag{11.7.2}$$

则称作用量泛函 $S$ 关于群 $G_r$ 具有不变性，且称变换群 $G_r$(11.7.1)为系统的**对称群**。

如果变换群(11.7.1)取如下无穷小变换

$$
G_{\infty r}:\begin{cases} x^{\mu}\to x'^{\mu}=x^{\mu}+\delta x^{\mu}, & \mu=1,2,3,4, \\ \phi_{a}\to\phi'_{a}=\phi_{a}+\delta\phi_{a}, & a=1,2,\cdots,r \end{cases} \tag{11.7.3}
$$

时，(11.7.2)恒成立，则称作用量泛函关于群(11.7.3)具有无穷小不变性，且称无穷小变换群 $G_{\infty r}$ 为系统的**连续对称群**。

我们首先设作用量泛函具有如下结构

$$
S=\int_{V}L(\phi_{a},\phi_{a,\mu})dV, \tag{11.7.4}
$$

于是，这时的 Noether 定理有下面的形式：

如果作用量泛函(11.7.4)关于连续对称群(11.7.3)具有无穷小不变性，则必有

$$
J^{\mu}{}_{,\mu}=0, \tag{11.7.5}
$$

其中

$$
J^{\mu}=-\left[\left(L\delta^{\mu}_{\lambda}-\frac{\partial L}{\partial\phi_{a,\mu}}\phi_{a,\lambda}\right)\delta x^{\lambda}+\frac{\partial L}{\partial\phi_{a,\mu}}\delta\phi_{a}\right]. \tag{11.7.6}
$$

下面我们证明 Noether 定理的这一具体形式（参见[6]）：

由(11.7.2)式得到

$$
\int_{V'}L(\phi_{a}+\delta\phi_{a},\ \phi_{a,\nu}+\delta\phi_{a,\nu})dV'
$$

$$
=\int_{V}L(\phi_{a},\ \phi_{a,\nu})dV. \tag{11.7.7}
$$

现在先从 $V'$ 变换到 $V$，注意到

$$
dV'=\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|dV, \tag{11.7.8}
$$

这里 $|\partial x'/\partial x|$ 是变换 $x'^{\mu}=x'^{\mu}(x^{\nu})$ 的 Jacobi 行列式，因为由(11.7.3)

$$
\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}=\delta^{\mu}_{\nu}+\frac{\partial\delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \tag{11.7.9}
$$

且 $\delta x^\mu$ 和它们的偏导数都是小量，取到一阶近似将有

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|=\begin{vmatrix}1+\frac{\partial\delta x^1}{\partial x^1} & \frac{\partial\delta x^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\delta x^1}{\partial x^4}\\ \frac{\partial\delta x^2}{\partial x^1} & 1+\frac{\partial\delta x^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\delta x^2}{\partial x^4}\\ & \cdots & & \\ \frac{\partial\delta x^4}{\partial x^1} & \frac{\partial\delta x^4}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\delta x^4}{\partial x^4}\end{vmatrix}\simeq 1+\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\mu},$$

(11.7.10)

将 Lagrange 函数也展开到 $\delta\phi_a$ 的一次项有

$$L(\phi_a+\delta\phi_a,\phi_{a,\nu}+\delta\phi_{a,\nu})$$

$$=L(\phi_a,\phi_{a,\nu})+\frac{\partial L}{\partial\phi_a}\delta\phi_a+\frac{\partial L}{\partial\phi_{a,\nu}}\delta\phi_{a,\nu}. \qquad (11.7.11)$$

因此，在线性近似下，我们有

$$\int_V\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_a}\delta\phi_a+\frac{\partial L}{\partial\phi_{a,\nu}}\delta\phi_{a,\nu}+L\frac{\partial\delta x^\nu}{\partial x^\nu}\right)dV=0. \qquad (11.7.12)$$

为了变换被积函数，注意到 $\delta x^\mu$ 和 $\delta\phi_a$ 以及它们的导数都是小量，在线性近似下有下面的结果：

首先，由(11.7.3)式看到

$$\delta\phi_{a,\nu}=\frac{\partial\phi'_a}{\partial x'^\nu}-\frac{\partial\phi_a}{\partial x^\nu}=\frac{\partial(\phi_a+\delta\phi_a)}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}-\frac{\partial\phi_a}{\partial x^\nu}$$

$$=[\phi_{a,\mu}+(\delta\phi_a)_{,\mu}][\delta^\mu_\nu-(\delta x^\mu)_{,\nu}]-\phi_{a,\nu}$$

$$\simeq-\phi_{a,\mu}(\delta x^\mu)_{,\nu}+(\delta\phi_a)_{,\nu}. \qquad (11.7.13)$$

其次，利用由最小作用量原理导出的 EL 方程(11.1.7)得到

$$\frac{\partial L}{\partial\phi_a}=\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{a,\mu}}\right), \qquad (11.7.14)$$

所以，(11.7.12)式中第一项变为

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_a}\delta\phi_a=\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}}\right)_{,\mu}\delta\phi_a$$

$$=\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}}\delta\phi_a\right)_{,\mu}-\frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}}(\delta\phi_a)_{,\mu}. \qquad (11.7.15)$$

利用(11.7.13)式，(11.7.12)式中第二项变为

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}}\delta\phi_{a,\mu}=\frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}}[-\phi_{a,\nu}(\delta x^\nu)_{,\mu}+(\delta\phi_a)_{,\mu}]$$

$$=-\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}}\phi_{a,\nu}\delta x^\nu\right)_{,\mu}+\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}}\right)_{,\mu}\phi_{a,\nu}\delta x^\nu$$

$$+\frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}}\phi_{a,\nu\mu}\delta x^\nu+\frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}}(\delta\phi_a)_{,\mu}$$

$$=-\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}}\phi_{a,\nu}\delta x^\nu\right)_{,\mu}+\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_a}\phi_{a,\nu}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}}\phi_{a,\mu\nu}\right)\delta x^\nu+\frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}}(\delta\phi_a)_{,\mu}$$

$$=-\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}}\phi_{a,\nu}\delta x^\nu\right)_{,\mu}+L_{,\nu}\delta x^\nu+\frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}}(\delta\phi_a)_{,\mu}, \qquad (11.7.16)$$

并且，(11.7.12)式中的第三项为

$$L\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\mu}=(L\delta^\mu_\nu\delta x^\nu)_{,\mu}-L_{,\nu}\delta x^\nu. \qquad (11.7.17)$$

将(11.7.15)、(11.7.16)和(11.7.17)代入(11.7.12)式中得到

$$\int_V\left[\left(L\delta^\mu_\nu-\frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}}\phi_{a,\nu}\right)\delta x^\nu+\frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}}\delta\phi^a\right]_{,\mu}dV=0. \qquad (11.7.18)$$

因为$V$是任意的，最后得到(11.7.5)式，定理得证。

从定理的证明中可以看到，对于无穷小不变性来说，(11.7.5)不仅是必要条件，显然也是充分条件。值得注意的是，在定理

的证明过程中，为了仅使用常见的数学工具，不得不引用了由最小作用量原理导出的 EL 场方程。然而，在近代场论中，EL 场方程已经成为 Noether 定理的推论。因此，该证法没能突出 Noether 定理的重要性，这是美中不足的。

如果 Lagrange 函数取作

$$L=L(\phi_a,\ \phi_{a,\mu},\ \phi_{a,\mu\nu}), \tag{11.7.19}$$

则上述定理仍成立，只是(11.7.6)式改为

$$J^\mu=-L\delta x^\mu-\frac{\partial L}{\partial\phi_{a,\mu}}\bar{\delta}\phi_a-\frac{\partial L}{\partial\phi_{a,\mu\nu}}\bar{\delta}\phi_{a,\nu}$$

$$+\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{a,\mu\nu}}\right)_{,\nu}\bar{\delta}\phi_a, \tag{11.7.20}$$

式中

$$\bar{\delta}\phi_a\equiv\delta\phi_a-\phi_{a,\sigma}\delta x^\sigma \tag{11.7.21}$$

是场量 $\phi_a$ 的 Lie 微分。

如果 Lagrange 函数取如下形式

$$L=L(x^\mu,\ \phi_a,\ \phi_{a,\mu},\ \phi_{a,\mu\nu}), \tag{11.7.22}$$

则(11.7.5)式应改为

$$(\delta L/\delta\phi_a)\bar{\delta}\phi_a=J^\mu{}_{,\mu}, \tag{11.7.23}$$

式中 $J^\mu$，$\bar{\delta}\phi_a$ 同(11.7.20)和(11.7.21)式，而

$$\frac{\delta L}{\delta\phi_a}=\frac{\partial L}{\partial\phi_a}-\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{a,\mu}}\right)_{,\mu}+\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{a,\mu\nu}}\right)_{,\mu\nu} \tag{11.7.24}$$

是 Lagrange 函数 $L$ 的 Lie 导数。以上结果都可类似地给予证明[7]。这里不再一一列举了。

下面我们分别讨论作用量泛函关于有限群与无限群具有无穷小不变性的特殊情况。有时，将关于有限群的对称性定理称为 **Noether 第一定理**，而将关于无限群的对称性定理叫做 **Noether 第二定理**。

我们称变换群

$$G_r^\prime:\begin{cases} x'^{\mu}=x^{\mu}+\varepsilon^{a}X_{a}x^{\mu}, \\ \phi_a^{\prime}=\phi_a+\varepsilon^{\beta}I_{\beta}\phi_a \end{cases} \tag{11.7.25}$$

为有限群，式中 $\varepsilon^{\beta}(\beta=1,2,\cdots,r)$ 为常数，而 $I_\beta$ 与 $X_a=\xi_a^{\mu}\partial_{\mu}$ 是群 $G_r^\prime$ 的微分形式的生成子。

于是，由(11.7.21)得到

$$\delta x^{\mu}=\varepsilon^{a}X_{a}x^{\mu}=\xi_a^{\mu}\varepsilon^{a}, \tag{11.7.26}$$

$$\delta\phi_a=\varepsilon^{\beta}I_{\beta}\phi_a, \tag{11.7.27}$$

和

$$\bar{\delta}\phi_a=(I_{\beta}\phi_a-\xi_{\beta}^{\mu}\partial_{\mu}\phi_a)\xi^{\beta}. \tag{11.7.28}$$

将(11.7.26)和(11.7.28)代入(11.7.23)和(11.7.20)就有

$$(I_{\beta}\phi_a-\xi_{\beta}^{\mu}\phi_{a,\mu})\left(\frac{\delta L}{\delta\phi_a}\right)=J_{\beta,\mu}^{\mu}, \tag{11.7.29}$$

式中

$$J_{\beta}^{\mu}=-\left[\frac{\partial L}{\partial\phi_{a,\mu}}-\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{a,\mu\nu}}\right)_{,\nu}\right](I_{\beta}\phi_a-\xi_{\beta}^{\sigma}\phi_{a,\sigma})$$

$$-L\xi_{\beta}^{\mu}-\frac{\partial L}{\partial\phi_{a,\mu\nu}}(I_{\beta}\phi_{a,\nu}-\xi_{\beta}^{\lambda}\phi_{a,\nu\lambda}). \tag{11.7.30}$$

于是我们有所谓 Noether 第一定理：如果作用量泛函(11.7.22)关于有限群 $G_r^\prime$ 具有无穷小不变性，则(11.7.29)、(11.7.30)式成立。该定理表明，流 $J_{\beta}^{\mu}$ 的散度是 Lagrange 函数的 Lie 导数 $\delta L/\delta\phi_a$ 的线性组合。这时，我们只要求作用量泛函$S$关于群$G_r^\prime$具有不变性，而并未要求 $\phi_a$ 是广义 EL 方程组的解。

在寻求作用量泛函的极小值的普通变分问题中，(11.7.29)右端的体积分经散度定理可以变成曲面积分，并且由假定在边界(固定端点问题)上场量和它的导数的变分为零而得到面积分为零，从而(11.7.29)左端的体积分也为零。即

$$\int_V(I_{\beta}\phi_a-\xi_{\beta}^{\mu}\phi_{a,\mu})(\delta L/\delta\phi_a)dV=0, \tag{11.7.31}$$

由此得到广义EL场方程 $\delta L/\delta\phi_a=0$。

但是，在群变分问题中，在物体的边界上（端点是小范围自由的）$\delta\phi_a$ 一般不为零，在这种情况下，变分原理仅给出(11.7.29)式而得不到广义EL场方程。

如果 $\phi_a$ 是极值线，即 $\delta L/\delta\phi_a=0$，则(11.7.29)给出了微分型守恒律

$$\partial_\mu J^\mu_\beta=0, \tag{11.7.32}$$

式中 $J^\mu_\beta$ 是由(11.7.30)给出的，且此时称为"守恒流"。

如果Lagrange函数不含有场量 $\phi_a$ 的二阶导数，即

$$L=L(x^\mu,\ \phi_a,\ \phi_{a,\mu}), \tag{11.7.33}$$

这时"守恒流"变成了如下形式

$$\begin{aligned}J^\mu_\beta&=-\frac{\partial L}{\partial\phi_{a,\mu}}I_\beta\phi_a+\left(\frac{\partial L}{\partial\phi_{a,\mu}}\phi_{a,\nu}-L\delta^\mu_\nu\right)\xi^\nu_\beta\\&=-\frac{\partial L}{\partial\phi_{a,\mu}}I_\beta\phi_a-T^\mu_\nu\xi^\nu_\beta,\end{aligned} \tag{11.7.34}$$

这里

$$T^\mu_\nu\equiv-\frac{\partial L}{\partial\phi_{a,\mu}}\phi_{a,\nu}+L\delta^\mu_\nu \tag{11.7.35}$$

就是前面的(11.2.11)式给出的能量-动量张量。

如果 $\phi_a$ 是广义EL方程组

$$\delta L/\delta\phi_a=\theta^a \tag{11.7.36}$$

的解，这里 $\theta^a$ 是一个新的函数（例如是不包含在Lagrange函数中的源），那么由(11.7.29)式得到

$$\partial_\mu J^\mu_\beta+\theta^a(I_\beta\phi_a-\xi^\mu_\beta\phi_{a,\mu})=0. \tag{11.7.37}$$

该式表明，流的散度这时将异于零，即守恒律，并由此对称性的失效可经一定的方式与新的源发生关系。

下面我们转向讨论作用量泛函$S$关于无限群的不变性。

我们称变换群

$$G_{\infty r}:\begin{cases} x'^{\mu}=x^{\mu}+\varepsilon^{\beta}(\mathrm{x})X_{\beta}x^{\mu}, \\ \phi'_{a}=\phi_{a}+\delta\phi_{a} \end{cases} \tag{11.7.38}$$

为无限群，式中 $\varepsilon^{\beta}(\mathrm{x})$，$\beta=1,2,\cdots,r$ 是时空的函数，而

$$\delta\phi_{a}=B_{a\beta}(x^{\mu},\ \phi_{\gamma},\ \phi_{\gamma,\mu},\ \cdots)\varepsilon^{\beta}(\mathrm{x})$$

$$+b^{\lambda}_{a\beta}(x^{\mu},\ \phi_{\gamma},\ \phi_{\gamma,\mu},\ \cdots)\frac{\partial\varepsilon^{\beta}(\mathrm{x})}{\partial x^{\lambda}}. \tag{11.7.39}$$

如同在有限群的情况一样，这里已假设 $\delta x^{\mu}$ 和 $\delta\phi_{a}$ 均是 $\varepsilon^{\beta}(\mathrm{x})$ 和 $\partial\varepsilon^{\beta}(x)/\partial x^{\mu}$ 的线性组合（因为对不适定守恒律的存在而言，讨论到 $\varepsilon(\mathrm{x})$ 的一阶导数已足够了。），这时

$$\left(\frac{\delta L}{\delta\phi_{a}}\right)\delta\phi^{a}=\left(\frac{\delta L}{\delta\phi_{a}}\right)\left(B_{a\beta}\varepsilon^{\beta}+b^{\mu}_{a\beta}\frac{\partial\varepsilon^{\beta}}{\partial x^{\mu}}\right). \tag{11.7.40}$$

现在，反复利用乘法求导法则可以证明恒等式

$$\psi(x^{\mu},\ \phi_{a},\ \phi_{a,\mu},\ \cdots)\frac{\partial^{\tau}\varepsilon(\mathrm{x})}{(\partial x^{\mu})^{\tau}}$$

$$=(-1)^{\tau}\frac{\partial^{\tau}\psi}{(\partial x^{\mu})^{\tau}}\varepsilon(\mathrm{x})\ \ \mathrm{mod\ div}, \tag{11.7.41}$$

这里 $\psi$ 和 $\varepsilon$ 可以是任意函数，$\tau$ 不求和。这表明可以用 $\varepsilon^{\beta}(\mathrm{x})$ 本身来代替它们的导数。因此，(11.7.23)式变成

$$\left[B_{a\beta}\frac{\delta L}{\delta\phi_{a}}-\partial_{\mu}\left(b^{\mu}_{a\beta}\frac{\delta L}{\delta\phi_{a}}\right)\right]\varepsilon^{\beta}$$

$$=-\mathrm{div}\left(K^{\mu}+b^{\mu}_{a\beta}\frac{\delta L}{\delta\phi_{a}}\varepsilon^{\beta}\right). \tag{11.7.42}$$

式中，当 Lagrange 函数不含有场量 $\phi_{a}$ 的二阶导数时有

$$K^{\mu}=\frac{\partial L}{\partial\phi_{a,\mu}}B_{a\beta}\varepsilon^{\beta}+L\delta x^{\mu}+b^{\nu}_{a\beta}\partial_{\nu}\varepsilon^{\beta}\frac{\partial L}{\partial\phi_{a,\mu}}. \tag{11.7.43}$$

如果现在 $\varepsilon^{\beta}(\mathrm{x})$ 以及它的所有导数在给定的时空区域 $V$ 的边

界 $\partial V$ 上恒为零，在区域 $V$ 上对 (11.7.42) 的两边积分，由散度定理和上述边界条件，(11.7.42) 的右边积分为零。于是从条件 $\delta S=0$ 得到

$$\int_V \left[ B_{\alpha\beta} \frac{\delta L}{\delta \phi_\alpha} - \partial_\mu \left( b^\mu_{\alpha\beta} \frac{\delta L}{\delta \phi_\alpha} \right) \right] \varepsilon^\beta dV = 0. \qquad (11.7.44)$$

由于 $\varepsilon^\beta$ 是任意的，故必有

$$B_{\alpha\beta} \frac{\delta L}{\delta \phi_\alpha} \equiv \partial_\mu \left( b^\mu_{\alpha\beta} \frac{\delta L}{\delta \phi_\alpha} \right), \qquad (11.7.45)$$

这就是 Noether 第二定理所要求的 Lagrange 函数的 Lie 导数间的依赖关系，称为 **Noether 恒等式**。(11.7.45)式（共 $r$ 个）是彼此线性无关的，且对 $G_{\infty r}$ 中的有限变换也是成立的。如果我们引进连络 $\Gamma^\beta_{\mu\alpha} = B_{\alpha\sigma} h^{\sigma\beta}_\mu$，这里 $h^{\sigma\beta}_\mu$ 是由条件 $h^{\beta\sigma}_\mu b^\mu_{\sigma\alpha} = \delta^\beta_\alpha$ 决定的，那么(11.7.45)可写成协变守恒律的形式

$$\nabla_\mu \left( b^\mu_{\alpha\beta} \frac{\delta L}{\delta \phi_\alpha} \right) \equiv 0. \qquad (11.7.46)$$

为了从 $G'_{\infty r}$ 的无穷小变换过渡到有限变换，重要的是：a) $\delta x^\mu$ 和 $\delta\phi_\alpha$ 关于 $\varepsilon^\beta$ 和它们的导数是线性的；b) $\delta x^\mu$ 和 $\delta\phi_\alpha$ 不包含 $\phi_\alpha$ 的导数，因为否则 $G_{\infty r}$ 的有限变换将依赖于 $\phi_\alpha$ 的无限多个导数。关系式(11.7.45)和对于有限群 $G_r$ 的(11.7.29)式一样，对任意的 $\phi_\alpha$ 都是成立的，并未要求 $\phi_\alpha$ 是广义 EL 方程组的解。

如前面一样，我们可以考虑两种情况：

1) 若 $\phi_\alpha$ 是极值线，即 $\delta L/\delta\phi_\alpha = 0$，那么由(11.7.45)得到

$$\partial_\mu \left( b^\mu_{\alpha\beta} \frac{\delta L}{\delta \phi_\alpha} \right) = 0, \qquad (11.7.47)$$

该式提供了通过微分从场方程得到所需的守恒律的一种方法。

2) 如果 $\phi_\alpha$ 满足方程组

$$\frac{\delta L}{\delta \phi_\alpha} = \theta^\alpha, \qquad (11.7.48)$$

这里$\theta^a$表示一个新的函数。那么从(11.7.45)式我们得到如下的加于$\theta^a$的附加条件：

$$B_{a\beta}\theta^a=\partial_\mu(b^\mu_{a\beta}\theta^a). \qquad (11.7.49)$$

这样的函数$\theta^a$起着破坏场方程的$G'_\infty$，不变性的项的作用，例如在规范不变性理论中的质量项，但是，它关于有限群$G'_r$却是不变的。于是，Noether 恒等式导致加于场量的附加条件，这些附加条件排除了额外的自由度。例如，设

$$\frac{\delta L}{\delta\phi_a}=\lambda\phi^a, \qquad (11.7.50)$$

式中$\lambda$是常数，则由(11.7.49)式得到

$$\partial_\mu(b^\mu_{a\beta}\phi^a)=B_{a\beta}\phi^a. \qquad (11.7.51)$$

Noether 称由 Noether 第一定理得到的守恒律(11.7.32)为**适定守恒律**。有时，又将它们叫做**弱守恒律**。这是因为它们仅在$\phi_a$是极值线时才被满足。与伴随着场方程的$G_r$不变性的弱守恒律不同，关于无限群$G_{\infty r}$的不变性导致**强守恒律**，这样的守恒律不仅对$\phi_a$是极值线成立，而且对任意的$\phi$都成立。事实上，强守恒律是 Noether 恒等式的一种表示。和在广义相对论中的情况一样，在规范场理论中出现的正是这样的强守恒律。这些守恒律是不适定的，因为在它们中的守恒流是极值线的线性组合。这样的强（不适定）的守恒律的一个例子是恒被满足的 Einstein 方程

$$\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{;\mu}\equiv0. \qquad (11.7.52)$$

后面我们将指出，这一恒等式是 Noether 恒等式在$G_{\infty4}$的特殊例子。在一般情况下它们取成

$$(\delta\hat{L}/\delta g_{\mu\nu})_{;\mu}\equiv0, \qquad (11.7.53)$$

这里$\hat{L}$是 Lagrange 密度函数。

对电动力学，Noether 恒等式有形式

$$\partial_\mu(\delta L/\delta A_\mu)\equiv 0. \qquad (11.7.54)$$

如果场是无源的且$L=-F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}/4$，那么由(11.7.54)式推出

$$\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu}=0. \qquad (11.7.55)$$

这个守恒律的积分归结为通过一个二维闭曲面$\sigma$的电和磁场的流的Gauss定理，即

$$\oint_\sigma H d\sigma=0 \quad 和\oint_\sigma E d\sigma=0. \qquad (11.7.56)$$

如果场的源出现在EL方程组的右端，那么从(11.7.54)和(11.7.55)我们得到熟知的电动力学中的源的守恒律和引力场中的能量-动量张量的守恒律

$$\partial_\mu J^\mu=0 \quad 和\ T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0. \qquad (11.7.57)$$

这两个守恒律都是Noether恒等式，即场方程的附加条件的结果。

如果Noether恒等式(11.7.45)得到满足，从(11.7.42)得到

$$\operatorname{div}\left[J^\mu_\beta\varepsilon^\beta(x)-b^\nu_{\alpha\beta}\partial_\nu\varepsilon^\beta(x)\frac{\partial L}{\partial\phi_{\alpha,\mu}}-b^\mu_{\alpha\beta}\varepsilon^\beta(x)\frac{\delta L}{\delta\phi_\alpha}\right]=0, \qquad (11.7.58)$$

这里$J^\mu_\beta=B_{\alpha\beta}\partial L/\partial\phi_{\alpha,\mu}$。方程(11.7.58)对于任意的$\varepsilon^\beta(x)$都是成立的，并且它保证了作用量泛函关于无限群$G_{\infty r}$的不变性以及Noether第二定理的逆形式的成立。

利用EL方程$\delta L/\delta\phi_\alpha=0$，我们又得到

$$\operatorname{div}\left[J^\mu_\beta\varepsilon^\beta(x)-b^\nu_{\alpha\beta}\partial_\nu\varepsilon^\beta(x)\frac{\partial L}{\partial\phi_{\alpha,\mu}}\right]=0. \qquad (11.7.59)$$

考虑到EL方程和Noether恒等式后，(11.7.59)式的右端和Lagrange函数的变分仅差一个负号，于是展开(11.7.59)式得到

$$\delta L=-\left\{\partial_\mu J^\mu_\beta\varepsilon^\beta(x)+\left[J^\mu_\beta-\partial_\nu\left(b^\mu_{\alpha\beta}\frac{\partial L}{\partial\phi_{\alpha,\nu}}\right)\right]\partial_\mu\varepsilon^\beta(x)\right.$$

$$-b^{\nu}_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\nu\varepsilon^\beta(\mathrm{x})\frac{\partial L}{\partial\phi_{\alpha,\mu}}\Big\}. \tag{11.7.60}$$

因为参量函数 $\varepsilon^\beta(\mathrm{x})$是完全任意的，从作用量泛函的不变性条件($\delta L=0$)得到(11.7.60)中 $\varepsilon^\beta(\mathrm{x})$与它们的导数的系统均应等于零，即

$$\partial_\mu J^\mu_\beta=0, \tag{11.7.61}$$

$$J^\mu_\beta=\partial_\nu\Big(b^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{\partial L}{\partial\phi_{\alpha,\nu}}\Big), \tag{11.7.62}$$

$$b^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial L}{\partial\phi_{\alpha,\mu}}+b^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{\partial L}{\partial\phi_{\alpha,\nu}}=0. \tag{11.7.63}$$

因此，在极值线上，作用量泛函关于无限群的不变性归结为流 $J^\mu_\beta=B_{\alpha\beta}\,\partial L/\partial\phi_{\alpha,\mu}$ 的对应于 $G_r$ 不变性的普通守恒律(11.7.61)。但是，由于条件(11.7.62)和(11.7.63)，这些流等于某个反对称张量的散度。因此，由 Gauss定理知相应的守恒荷$Q_\beta=\int_V J^4_\beta dV$（参见(11.3.17)）总可以表成二维闭曲面上的积分的形式

$$Q_\beta=\oint b^{i}_{\alpha\beta}\frac{\partial L}{\partial\phi_{\alpha,i}}d\sigma^i, \tag{11.7.64}$$

式中 $i$ 从 1 到 3 求和。如果 Lagrange 函数关于无限群 $G_{\infty r}$ 失去不变性，但是 EL 方程和 Noether 恒等式仍被满足，则(11.7.60)导致下列方程组：

$$\frac{\partial\delta L}{\partial\varepsilon^\beta(\mathrm{x})}=-\partial_\mu J^\mu_\beta, \tag{11.7.65}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\delta L}{\partial(\partial_\mu\varepsilon^\beta(\mathrm{x}))}&=-\Big[J^\mu_\beta-\partial_\nu\Big(b^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{\partial L}{\partial\phi_{\alpha,\nu}}\Big)\Big]\\&=-J^\mu_\beta+b^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{\partial L}{\partial\phi_\alpha}+\partial_\nu b^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{\partial L}{\partial\phi_{\alpha,\nu}},\end{aligned} \tag{11.7.66}$$

$$\frac{\partial\delta L}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\varepsilon^\beta(\mathbf{x}))}=\frac{1}{2}\left(b^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial L}{\partial\phi_{\alpha,\mu}}+b^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{\partial L}{\partial\phi_{\alpha,\nu}}\right).$$

(11.7.67)

如果场量关于 $G_{\infty r}$ 是齐次地进行变换的，即 $b^{\mu}_{\alpha\beta}=0$，那么上三式退化为1960年 Gell-Mann 和 Levy 提出的方程

$$\frac{\partial(\delta L)}{\partial(\partial_\mu\varepsilon^\beta(\mathbf{x}))}=-J^{\mu}_{\beta},\tag{11.7.68}$$

$$\frac{\partial(\delta L)}{\partial\varepsilon^\beta(\mathbf{x})}=-\partial_\mu J^{\mu}_{\beta}.\tag{11.7.69}$$

对于描述具有定域规范不变性的大域规范场，这些方程导致流和场间的比例关系。

## §11.8 Lagrange 函数的定域规范不变性与Noether第二定理

本节，我们将讨论具有定域规范不变性的 Lagrange 函数的结构问题。为了讨论问题方便起见，将按下面分类由浅入深展开。

(1) 自由场

设自由场的 Lagrange 函数只依赖于自由场 $A^{a}_{\mu}$ 与它的一阶导数 $A^{a}_{\mu,\nu}$，即

$$L=L(A^{a}_{\mu},\ A^{a}_{\mu,\nu}),\tag{11.8.1}$$

并且要求 $L$ 关于定域规范群是不变的——具有定域规范不变性。

令时空不变而只有规范变换的定域规范群（无限群）为

$$G'_{\infty n}:\left\{\begin{array}{l}x'^{\mu}=x^{\mu},\\ A'^{a}_{\mu}=A^{a}_{\mu}+f^{a}_{\beta\gamma}A^{\gamma}_{\mu}\varepsilon^{\beta}(\mathbf{x})+\partial_\mu\varepsilon^{a}(\mathbf{x}),\end{array}\right.\tag{11.8.2}$$

$$\alpha,\beta,\gamma=1,2,\cdots,n;\ \mu=1,2,3,4,$$

式中，$\varepsilon^{a}(\mathbf{x})$是依赖于时空坐标的函数。$f^{a}_{\beta\gamma}$ 是群表示的结构常

数，满足 Jacobi 恒等式和反对称条件：

$$f^{\delta}_{\alpha\beta}f^{\alpha}_{\delta\gamma}+f^{\delta}_{\beta\gamma}f^{\alpha}_{\delta\alpha}+f^{\delta}_{\gamma\alpha}f^{\alpha}_{\delta\beta}=0, \tag{11.8.3}$$

$$f^{\alpha}_{\beta\gamma}+f^{\alpha}_{\gamma\beta}=0. \tag{11.8.4}$$

由(11.8.2)得到

$$\delta x^{\mu}=x'^{\mu}-x^{\mu}=0, \tag{11.8.5}$$

$$\delta A^{\alpha}_{\mu}=A'^{\alpha}_{\mu}-A^{\alpha}_{\mu}=f^{\alpha}_{\beta\gamma}A^{\gamma}_{\mu}\varepsilon^{\beta}(\mathbf{x})+\partial_{\mu}\varepsilon^{\alpha}(\mathbf{x}). \tag{11.8.6}$$

我们将讨论作用量泛函

$$S=\int_{V}L(A^{\alpha}_{\mu},A^{\alpha}_{\mu,\nu})dV \tag{11.8.7}$$

关于群 $G_{\infty n}$ 具有不变性时，Lagrange 函数(11.8.1)的具体结构问题。

应用 Noether 第二定理，由作用量泛函$S$的不变性条件可知

$$(\delta L/\delta A^{\alpha}_{\mu})\delta A^{\alpha}_{\mu}\equiv\partial_{\mu}[-(\partial L/\partial A^{\alpha}_{\nu,\mu})\delta A^{\alpha}_{\nu}]. \tag{11.8.8}$$

将(11.8.6)代入(11.8.8)式中，由于(11.8.8)是恒等式，因此$\varepsilon^{\alpha}(\mathbf{x})$，$\partial_{\mu}\varepsilon^{\alpha}(\mathbf{x})$和$\partial_{\mu}\partial_{\nu}\varepsilon^{\alpha}(\mathbf{x})$的系数必须为零。由此可得

$$f^{\alpha}_{\beta\gamma}A^{\gamma}_{\mu}(\partial L/\partial A^{\alpha}_{\mu})+f^{\alpha}_{\beta\gamma}A^{\gamma}_{\nu,\mu}(\partial L/\partial A^{\alpha}_{\nu,\mu})=0, \tag{11.8.9}$$

$$\partial L/\partial A^{\alpha}_{\mu}+f^{\beta}_{\alpha\gamma}A^{\gamma}_{\nu}(\partial L/\partial A^{\beta}_{\nu,\mu})=0 \tag{11.8.10}$$

和

$$\partial L/\partial A^{\alpha}_{(\nu,\mu)}=0. \tag{11.8.11}$$

(11.8.11)式表明 Lagrange 函数 $L$ 关于场量$A^{\alpha}_{\mu}$ 的导数的对称部分的导数为零，故 $L$ 中一定不含有 $A^{\alpha}_{(\nu,\mu)}$ 项。由于

$$A^{\alpha}_{\nu,\mu}=A^{\alpha}_{(\nu,\mu)}+A^{\alpha}_{[\nu,\mu]}, \tag{11.8.12}$$

所以，场量 $A^{\alpha}_{\mu}$的导数只能以反对称部分 $A^{\alpha}_{[\nu,\mu]}$ 的形式出现在 Lagrange 函数 $L$ 之中。

而(11.8.10)式又可写成

$$\partial L/\partial A^{\alpha}_{\mu}=(\partial L/\partial A^{\beta}_{[\nu,\mu]})f^{\beta}_{\alpha\gamma}A^{\gamma}_{\nu}. \tag{11.8.13}$$

注意到作用量泛函$S$（亦即 Lagrange 函数 $L$）的定义，Lagrange 函数 $L$ 关于场量的导数将以(11.8.13)式右端的形式出现在 $L$ 之

中. 于是由于：1) $L$ 中含有场量 $A_\mu^\alpha$；2) $L$ 中含有场量 $A_\mu^\alpha$ 的形式一定有形如 $f_{\alpha\gamma}^\beta A_\mu^\gamma$ 的部分，从而场 $A_\mu^\alpha$ 和它们的一阶导数只能以下面的特殊组合形式出现于 $L$ 之中：

$$L=L(F_{\mu\nu}^\alpha), \tag{11.8.14}$$

这里

$$F_{\mu\nu}^\alpha = A_{\mu,\nu}^\alpha - A_{\nu,\mu}^\alpha - \frac{1}{2}f_{\beta\gamma}^\alpha [A_\mu^\beta A_\nu^\gamma - A_\nu^\beta A_\mu^\gamma]. \tag{11.8.15}$$

容易看出，$F_{\mu\nu}^\alpha$ 关于两个下标是反对称的：

$$F_{\mu\nu}^\alpha = -F_{\nu\mu}^\alpha, \tag{11.8.16}$$

并且 $F_{\mu\nu}^\alpha$ 关于规范群 (11.8.2) 是齐次变换：

$$\delta F_{\mu\nu}^\alpha = f_{\beta\gamma}^\alpha F_{\mu\nu}^\gamma \varepsilon^\beta(x). \tag{11.8.17}$$

由于 $F_{\mu\nu}^\alpha$ 的结构与 Maxwell 场张量相同，我们称 $F_{\mu\nu}^\alpha$ 为场量 $A_\mu^\alpha$ 的"应力张量"。由(11.8.14)和(11.8.17)式又知 Lagrange 函数一定是如下的结构形式

$$L=L(F_{\mu\nu}^\alpha f_{\alpha\gamma}^\delta f_{\delta\beta}^\gamma F_{\sigma\lambda}^\beta). \tag{11.8.18}$$

现在，引入一个新量

$$F_{\mu\nu\alpha}=F_{\mu\nu}^\beta f_{\beta\delta}^\gamma f_{\gamma\alpha}^\delta \equiv F_{\mu\nu}^\beta g_{\beta\alpha}, \tag{11.8.19}$$

式中，$g_{\beta\alpha}\equiv f_{\beta\delta}^\gamma f_{\gamma\alpha}^\delta$。由结构常数 $f_{\alpha\beta}^\gamma$ 的性质可知，$g_{\alpha\beta}$ 关于 $\alpha$, $\beta$ 是对称的，它构成内蕴度量。并且，可以证明

$$\delta F_{\mu\nu\alpha}=F_{\mu\nu\beta}f_{\alpha\gamma}^\beta \varepsilon^\gamma(x), \tag{11.8.20}$$

此时，(11.8.18) 变成

$$L=L(F_{\mu\nu\alpha}F_{\sigma\lambda}^\alpha). \tag{11.8.21}$$

因此，具有规范不变性的（而且也是相对论性不变的）最简单的 Lagrange 函数$L$具有如下的形式：

$$L_0=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu a}F^{\mu\nu a}. \tag{11.8.22}$$

由于具有不变性的任意的 Lagrange 函数$L$一定是$L_0$的某个复合函数，我们称$L_0$是自由规范场的 Lagrange 函数。

（2） $A_\mu^a$与$\psi$的耦合场

下面我们讨论除了规范场 $A_\mu^a$ 外，还存在一个用 $\psi$ 描述波函数的场，二者间的耦合存在交互作用。设该交互作用不依赖于$A_\mu^a$的导数。我们的目的是求出这种情况下的 Lagrange 函数的结构。

描述这一交互作用的 Lagrange 函数记作

$$L_{\text{int}}=L_{\text{int}}(A_\mu^a,\ \psi,\ \psi_{,\mu}), \tag{11.8.23}$$

且它关于下面的规范群具有不变性

$$G_{\infty n}'':\begin{cases} x'^\mu=x^\mu, \\ A'^a_\mu=A_\mu^a+f^a_{\beta\gamma}A_\mu^\gamma\varepsilon^\beta(\mathrm{x})+\partial_\mu\varepsilon^a(\mathrm{x}), \\ \psi'=\psi+I_a\varepsilon^a\psi, \\ \overline{\psi}'=\overline{\psi}-\varepsilon^a\overline{\psi}I_a, \end{cases}$$

$$a,\beta,\gamma=1,2,\cdots,n;\ \mu=1,2,3,4 \tag{11.8.24}$$

式中，$I_a$是当$\varepsilon^a(\mathrm{x})=$常数$=\varepsilon^a$时从群$G_{\infty n}''$得到的有限群$G_n$某种表示的生成子。由（11.8.24）有

$$\delta A_\mu^a=f^a_{\beta\gamma}A_\mu^\gamma\varepsilon^\beta(\mathrm{x})+\partial_\mu\varepsilon^a(\mathrm{x}), \tag{11.8.25}$$

$$\delta\psi=I_a\varepsilon^a\psi, \tag{11.8.26}$$

$$\delta\overline{\psi}=-\varepsilon^a\overline{\psi}I_a. \tag{11.8.27}$$

注意到$L_{\text{int}}$不依赖于$A_\mu^a$的导数，因此，对 Lagrange 函数$L_{\text{int}}$，（11.8.8）式变成如下的方程组

$$f^\beta_{a\gamma}\frac{\partial L_{\text{int}}}{\partial A_\mu^\beta}A_\mu^\gamma=-\frac{\partial L_{\text{int}}}{\partial\psi}I_a\psi-\frac{\partial L_{\text{int}}}{\partial\psi_{,\mu}}I_a\psi_{,\mu}+\text{h.c.} \tag{11.8.28}$$

和

$$\frac{\partial L_{\text{int}}}{\partial A^a_\mu}=-\frac{\partial L_{\text{int}}}{\partial \psi_{,\mu}}I_a\psi+\overline{\psi}I_a\frac{\partial L_{\text{int}}}{\partial \overline{\psi}_{,\mu}},\tag{11.8.29}$$

式中h.c.表示 Hermitian 共轭 (Hermitian-conjugate) 项。由 (11.8.29) 可知，$L_{\text{int}}$依赖于具有协变导数形式的量

$$\nabla_\mu\psi=\partial_\mu\psi-\frac{1}{2}I_aA^a_\mu\psi,\tag{11.8.30}$$

$$\nabla_\mu\overline{\psi}=\partial_\mu\overline{\psi}+\frac{1}{2}\overline{\psi}I_aA^a_\mu.\tag{11.8.31}$$

可以证明，当将描述交互作用的 Lagrange 函数取作

$$L_{\text{int}}=\overline{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi-\nabla_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\psi-m\overline{\psi}\psi\tag{11.8.32}$$

时，(11.8.29) 式自然满足。这里，$\gamma^\mu$是§11.1中引进的 Dirac 矩阵（参见 (11.1.34)），$m$是任意常数。因此，描述 $A^a_\mu$ 和$\psi$耦合场的、关于群$G^{\prime\prime}_{\infty n}$具有不变性的最简单的 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned}L&=L_0+L_{\text{int}}\\&=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu a}F^{\mu\nu a}+\overline{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi-\nabla_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\psi-m\overline{\psi}\psi.\end{aligned}\tag{11.8.33}$$

(3) 场方程问题

对于 Lagrange 函数 (11.8.21)，规范场的场方程具有拟 Maxwell 形式

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}_a-f^\beta_{a\gamma}F^{\mu\nu}_\beta A^\gamma_\nu=0\tag{11.8.34}$$

或者

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}_a=\mathring{J}^\mu_a\equiv f^\beta_{a\gamma}F^{\mu\nu}_\beta A^\gamma_\nu.\tag{11.8.35}$$

如果$f^\beta_{a\gamma}$是各向同性旋转群的结构常数，则 (11.3.34) 就是杨-Mills 玻色子方程；在电动力学中，它的规范群$U(1)$是单参数的 Abel 群，所以$f^\beta_{a\gamma}=0$。于是，由(11.8.34)得到了 Maxwell 方程

$$\partial_\nu F_a^{\mu\nu}=0. \tag{11.8.36}$$

用$\psi$来描述的，并且与规范场具有交互作用的粒子，其运动方程满足广义EL方程

$$\delta L/\delta\psi=\partial L/\partial\psi-\nabla_\mu(\partial L/\partial(\nabla_\mu\psi))=0. \tag{11.8.37}$$

当 Lagrange 函数用 (11.8.32) 式给出时，上式变为

$$\gamma^\mu\nabla_\mu\psi-m\psi=0. \tag{11.8.38}$$

在弯曲的（即非欧的）时空中规范场的变分方程取下列形式

$$\partial_\nu\left(|h|\frac{\partial L}{\partial F_a^{\mu\nu}}\right)=|h|(J_a^\mu+\mathring{J}_a^\mu). \tag{11.8.39}$$

于是，规范场与引力场中的粒子的运动方程式为

$$|h|\frac{\partial L}{\partial\psi}-\nabla_\mu^*\left(|h|\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\mu\psi)}\right)=0, \tag{11.8.40}$$

这里

$$\nabla_\mu^*\left(|h|\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\mu\psi)}\right)=\partial_\mu\left(|h|\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\mu\psi)}\right)$$

$$+|h|\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\mu\psi)}I_a A_\mu^a, \tag{11.8.41}$$

则全部流的弱守恒律是

$$\partial_\mu[|h|(J_a^\mu+\mathring{J}_a^\mu)]=0. \tag{11.8.42}$$

广义Einstein 方程或者四元组$h_i^\mu$的场方程是

$$T_\mu^\nu(\text{所有场})+T_\mu^\nu(\text{所有粒子})=0, \tag{11.8.43}$$

即

$$\sum\left(L_{0\mu}^\nu-\frac{1}{4}\delta_\mu^\nu L_0\right)+\sum[(\partial L/\partial(\nabla_\nu\psi))\nabla_\mu\psi-L\delta_\mu^\nu]=0. \tag{11.8.44}$$

这些方程的物理意义是，进入到 Lagrange 函数中的所有场的能量-动量张量之和等于零。

当将引力场看成相伴有齐次局部 Lorentz 群的规范场时，

我们有

$$R^{\alpha\beta}_{(ij);\nu}=J^{\beta}_{(ij)}. \tag{11.8.45}$$

（4） Noether恒等式与守恒律

在上一节我们曾给出Noether对称性定理，其中的Lagrange函数的具体结构还不清楚。本节我们首先给出了具有规范不变性的 Lagrange 函数的结构。就是说，我们已经解决了两个问题：一是 Lagrange 函数关于某个群具有不变性；二是在这种不变性下，Lagrange 函数应具有的结构。于是，按 Noether 定理，一定有相应的守恒律。

为此，在（11.7.45)式中，用$f^{\beta}_{\alpha\gamma}A^{\gamma}_{\mu}$替换$B_{\alpha\beta}$，用1替换$b^{\mu}_{\alpha\beta}$有

$$f^{\beta}_{\alpha\gamma}A^{\gamma}_{\mu}\frac{\delta L}{\delta A^{\beta}_{\mu}}\equiv\partial_{\mu}\left(\frac{\delta L}{\delta A^{\alpha}_{\mu}}\right), \tag{11.8.46}$$

其中

$$\frac{\delta L}{\delta A^{\alpha}_{\mu}}=\frac{\partial L}{\partial A^{\alpha}_{\mu}}-\partial_{\nu}\left(\frac{\partial L}{\partial A^{\alpha}_{\mu,\nu}}\right). \tag{11.8.47}$$

由于$A^{\alpha}_{\mu}$与$A^{\alpha}_{\mu,\nu}$仅仅通过$F^{\alpha}_{\mu\nu}$出现在 Lagrange 函数$L$之中，因此，我们用$F^{\alpha}_{\mu\nu}$来改写（11.8.46）式。应用下列二个关系式

$$\left.\frac{\partial L}{\partial A^{\alpha}_{\mu}}\right|_{A^{\alpha}_{\mu,\nu}=\text{常数}}=-\frac{\partial L}{\partial F^{\beta}_{\mu\nu}}f^{\beta}_{\alpha\gamma}A^{\gamma}_{\nu}, \tag{11.8.48}$$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial A^{\alpha}_{\mu,\nu}}\right|_{A^{\alpha}_{\mu}=\text{常数}}=-\frac{\partial L}{\partial F^{\alpha}_{\mu\nu}}=\frac{\partial L}{\partial F^{\alpha}_{\nu\mu}}, \tag{11.8.49}$$

我们得到

$$\frac{\delta L}{\delta A^{\alpha}_{\mu}}=\frac{\partial L}{\partial F^{\beta}_{\nu\mu}}f^{\beta}_{\alpha\gamma}A^{\gamma}_{\nu}-\partial_{\nu}\left(\frac{\partial L}{\partial F^{\alpha}_{\nu\mu}}\right)=\partial_{\nu}\left(\frac{\partial L}{\partial F^{\alpha}_{\mu\nu}}\right)$$
$$-\frac{\partial L}{\partial F^{\beta}_{\mu\nu}}f^{\beta}_{\alpha\gamma}A^{\gamma}_{\nu}; \tag{11.8.50}$$

$$\left[\partial_{\nu}\left(\frac{\partial L}{\partial F^{\alpha}_{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial L}{\partial F^{\beta}_{\mu\nu}}f^{\beta}_{\alpha\gamma}A^{\gamma}_{\nu}\right]f^{\alpha}_{\varepsilon\delta}A^{\delta}_{\mu}$$

$$\equiv -\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial F^\beta_{\mu\nu}}f^\beta_{\alpha\gamma}A^\gamma_\nu\right). \tag{11.8.51}$$

应用$F^\alpha_{\mu\nu}$的变换规律，恒等式(11.8.46)易改写成 Lagrange 函数的导数的协变散度的形式

$$\nabla_\mu\left[\partial_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial F^\alpha_{\mu\nu}}\right)-f^\beta_{\alpha\gamma}A^\gamma_\nu\frac{\partial L}{\partial F^\beta_{\mu\nu}}\right]=0, \tag{11.8.52}$$

或

$$\nabla_\mu\left(\frac{\delta L}{\delta A^\alpha_\mu}\right)\equiv 0. \tag{11.8.53}$$

当 Lagrange 函数取极值，即广义EL方程组成立时，由 (11.8.51) 式得到普通（弱）守恒律:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial F^\beta_{\mu\nu}}f^\beta_{\alpha\gamma}A^\gamma_\nu\right)=\partial_\mu\mathring{J}^\mu_\alpha=0, \tag{11.8.54}$$

式中

$$\mathring{J}^\mu_\alpha\equiv f^\beta_{\alpha\gamma}A^\gamma_\nu\frac{\partial L}{\partial F^\beta_{\mu\nu}} \tag{11.8.55}$$

是规范场的“自作用量”流。

守恒律 (11.8.54) 式关于定域规范群是非协变的。非适定流$\mathring{J}^\mu_\alpha$相似于广义相对论中引力场的能量-动量拟张量的意义。可以将它称作拟流。并且，它等于一个反对称张量的散度。在电动力学中，由于规范群是 Abel 群，所以

$$\mathring{J}^\mu_\alpha=0. \tag{11.8.56}$$

下面我们考虑用 (11.8.33) 式表示的 Lagrange 函数。这时，恒等式 (11.7.45) 取下列形式

$$f^\beta_{\alpha\gamma}A^\gamma_\mu\frac{\delta L}{\delta A^\beta_\mu}+\frac{\delta L}{\delta\psi}I_\alpha\psi-\bar{\psi}I_\alpha\frac{\delta L}{\delta\bar{\psi}}\equiv\partial_\mu\left(\frac{\delta L}{\delta A^\alpha_\mu}\right), \tag{11.8.57}$$

式中

$$\frac{\delta L}{\delta A^a_\mu} = \frac{\delta L_0}{\delta A^a_\mu} + \frac{\delta L_{\text{int}}}{\delta A^a_\mu} = \mathring{J}^\mu_a + J^\mu_a, \tag{11.8.58}$$

$$J^\mu_a = -\frac{\partial L_{\text{int}}}{\partial(\nabla_\mu \psi)} I_a \psi + \bar{\psi} I_a \frac{\partial L_{\text{int}}}{\partial(\nabla_\mu \bar{\psi})}. \tag{11.8.59}$$

如果$A^a_\mu$，$\psi$与$\bar{\psi}$是EL方程组的解，则由（11.8.57）得守恒律

$$\partial_\mu(\mathring{J}^\mu_a + J^\mu_a) = 0. \tag{11.8.60}$$

易看出守恒律（11.8.60）是协变的，它是普通（弱）的、但非适定的流守恒律。并且，该守恒律的结构类似广义相对论中能量守恒律：按通常意义守恒的是“物质”流+场拟流。“物质”即与规范场交互作用的粒子的流仅仅在协变散度的意义下是守恒的。容易看到，对于用（11.8.32）式表示的 Lagrange 函数，Noether 恒等式写成

$$\frac{\delta L}{\delta \psi} I_a \psi - \bar{\psi} I_a \frac{\delta L}{\delta \bar{\psi}} \equiv 0, \tag{11.8.61}$$

将流的定义引入后得

$$\partial_\mu J^\mu_a = f^\beta_{a\gamma} A^\gamma_\mu J^\mu_\beta. \tag{11.8.62}$$

## §11.9 二阶张量规范场

我们知道在连续统力学中，二阶张量被广泛地应用。为此，本节我们将讨论二阶张量的规范场。这里，我们将二阶张量的物理背景看成是引力场。我们将广义相对论看成是具有任意几何时空中的二阶对称张量$S_{\mu\nu}$的规范场理论。规范群是广义相对论中的任意的连续坐标变换群。变分是用 Lie 导数来定义的。广义相对论的时空表象是四维 Riemann 空间$V_4$，它的度量张量记作$g_{\mu\nu}$。

我们考虑 Riemann 空间$V_4$中的连续坐标变换：

$$x'^{\mu}=x^{\mu}+\xi^{\mu}(x)t, \tag{11.9.1}$$

式中 $t$ 是充分小的参数。在变换（11.9.1）下，二阶对称张量 $S_{\mu\nu}$ 的变换规律是

$$S'_{\mu\nu}(x')=\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\nu}}S_{\tau\lambda}(x). \tag{11.9.2}$$

对于协变二阶对称张量 $S_{\mu\nu}$，它的Lie导数是用下极限定义的：

$$\delta_L S_{\mu\nu}\overset{\text{df}}{=}\lim_{\delta t\to 0}\frac{S'_{\mu\nu}(x')-S_{\mu\nu}(x)}{\delta t} \tag{11.9.3}$$

即

$$\delta_L S_{\mu\nu}=\xi^{\tau}(x)\partial_{\tau}S_{\mu\nu}+S_{\mu\tau}\partial_{\nu}\xi^{\tau}(x)+S_{\tau\nu}\partial_{\mu}\xi^{\tau}(x). \tag{11.9.4}$$

如果 $S_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}$ 且连络符号完全由 $g_{\mu\nu}$ 的导数来表示（Riemann 连络）：

$$\left\{{\sigma \atop \mu\nu}\right\}=g^{\sigma\lambda}[\mu\nu\lambda]=\frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(g_{\nu\lambda,\mu}+g_{\mu\lambda,\nu}-g_{\mu\nu,\lambda}), \tag{11.9.5}$$

此时，$g_{\mu\nu}$ 的Lie导数可用协变导数表示成

$$\delta_L g_{\mu\nu}=\xi_{\mu;\nu}+\xi_{\nu;\mu}. \tag{11.9.6}$$

由自同构（11.9.2）生成的、且在 $\delta_L g_{\mu\nu}=0$ 的意义下保持度量张量 $g_{\mu\nu}$ 的Lie群称为Riemann 空间 $V_4$ 的运动群。相应的向量 $\xi^{\tau}$ 称为Killing 向量。在允许有运动群的空间中，已经知道度量张量在一点的分量，我们就可以通过平行移动来求得在各点的 $g_{\mu\nu}$。特别地，在平坦空间中，运动群变成了普通的时空对称群。例如，在 Minkowski 时空里运动群是 Poincaré 群；在具有常曲率的时空中运动群就是 Sitter 群 $O(4,1)$。从后者出发，在 $R\to\infty$ 的极限情况（这里 $R$ 是时空的曲率半径）则可得到Poincaré 群。

我们下面将分别讨论向量场、反对称二阶张量场和对称二阶

张量场的规范场

（1） 规范向量场

作为例子我们考虑向量场$A_\mu$，其协变分量的Lie导数为

$$\delta_L A_\mu = \xi^\tau \partial_\tau A_\mu + A_\tau \partial_\mu \xi^\tau, \tag{11.9.7}$$

而逆变分量的Lie导数为

$$\delta_L A^\mu = \xi^\tau \partial_\tau A^\mu - A^\tau \partial_\tau \xi^\mu. \tag{11.9.8}$$

应用（11.7.45）式，Noether 恒等式可改写成

$$\frac{\delta L}{\delta A_\mu}(\partial_\tau A_\mu - \partial_\mu A_\tau) \equiv \partial_\mu \left(\frac{\delta L}{\delta A_\mu}\right) A_\tau. \tag{11.9.9}$$

将该式两边与$\delta L/\delta A_\tau$缩并，我们得到

$$A_\tau \frac{\delta L}{\delta A_\tau} \partial_\mu \left(\frac{\delta L}{\delta A_\mu}\right) \equiv \frac{\delta L}{\delta A_\tau} \partial_{[\tau} A_{\mu]} \frac{\delta L}{\delta A_\mu} \equiv 0, \tag{11.9.10}$$

因此，或者守恒律

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta L}{\delta A_\mu}\right) = 0 \tag{11.9.11}$$

被满足，或者向量场满足条件

$$A_\tau \frac{\delta L}{\delta A_\tau} = 0. \tag{11.9.12}$$

如果源也被考虑在内，从 Noether 恒等式我们得到

$$J^\mu F_{\tau\mu} = 2(\partial_\mu J^\mu) A_\tau, \tag{11.9.13}$$

这里$F_{\tau\mu} = \partial_\tau A_\mu - \partial_\mu A_\tau$. 由此得到

$$\partial_\mu J^\mu (A_\tau J^\tau) = 0. \tag{11.9.14}$$

因此，或者源$J^\mu$是守恒的；即

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \tag{11.9.15}$$

或者这里没有交互作用，即

$$A_\tau J^\tau = 0. \tag{11.9.16}$$

将（11.9.13）式与$F^{*\tau\lambda}$缩并，这里

$$F^{*\tau\lambda} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2} \epsilon^{\tau\lambda\mu\nu} F_{\mu\nu}, \tag{11.9.17}$$

$\epsilon^{\tau\lambda\mu\nu}$是四阶的轮换算子（参见（11.1.26）式），我们得到

$$J^{\lambda}(F^{*}_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})\equiv 8\partial_{\mu}J^{\mu}(\epsilon^{\tau\lambda\alpha\beta}A_{\tau}F_{\alpha\beta}). \tag{11.9.18}$$

（2） 二阶反对称张量场

我们考虑反对称的二阶张量场$A_{\mu\nu}$：

$$A_{\mu\nu}+A_{\nu\mu}=0. \tag{11.9.19}$$

它的Lie导数是

$$\delta_L A_{\mu\nu}=\xi^{\tau}\partial_{\tau}A_{\mu\nu}+A_{\tau\nu}\partial_{\mu}\xi^{\tau}+A_{\mu\tau}\partial_{\nu}\xi^{\tau}. \tag{11.9.20}$$

这时，Noether 恒等式有形式

$$\frac{1}{2}\frac{\delta L}{\delta A_{\mu\nu}}(\partial_{\tau}A_{\mu\nu}-\partial_{\mu}A_{\tau\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu\tau})\equiv\partial_{\mu}\left(\frac{\delta L}{\delta A_{\mu\nu}}\right)A_{\tau\nu}. \tag{11.9.21}$$

如果

$$\partial_{[\tau}A_{\mu\nu]}\neq 0 \tag{11.9.22}$$

且

$$L=\frac{1}{4}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu}, \tag{11.9.23}$$

那么

$$\frac{\delta L}{\delta A_{\mu\nu}}=\frac{1}{2}A^{\mu\nu}, \tag{11.9.24}$$

并且恒等式（11.9.21）有形式

$$\frac{1}{2}A^{\mu\nu}(\partial_{\tau}A_{\mu\nu}-\partial_{\mu}A_{\tau\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu\tau})=(\partial_{\mu}A^{\mu\nu})A_{\tau\nu} \tag{11.9.25}$$

或

$$\frac{1}{2}A^{\mu\nu}\partial_{\tau}A_{\mu\nu}=\partial_{\mu}(A^{\mu\nu}A_{\tau\nu}), \tag{11.9.26}$$

由此得守恒律

$$\partial_{\mu}\left(A^{\mu\nu}A_{\tau\nu}-\frac{1}{4}\delta^{\mu}_{\tau}A^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}\right)=0. \tag{11.9.27}$$

在电动力学中，括号中的量扮演着电磁场能量-动量张量的角色。对于这些量的守恒律可以作为 Noether 恒等式的结果。

利用恒等式

$$A^{*\mu\nu}A_{\tau\nu}\equiv\frac{1}{4}\delta^{\mu}_{\tau}(A^{*\lambda\nu}A_{\lambda\nu}),\tag{11.9.28}$$

这里$A^{*\mu\nu}$的意义见（11.9.17）式，再利用 $A_{\mu\nu}$ 的反对称性，方程（11.9.21）可以改写成

$$(A^{*\lambda\nu}A_{\lambda\nu})\partial_{\mu}\left(\frac{\delta L}{\delta A_{\mu\sigma}}\right)\equiv 6A^{*\sigma\tau}\partial_{[\tau}A_{\mu\nu]}\frac{\delta L}{\delta A_{\mu\nu}}.\tag{11.9.29}$$

如果$A_{\mu\nu}$满足方程

$$\partial_{[\tau}A_{\mu\nu]}=0,\tag{11.9.30}$$

那么由（11.9.29）式得到

$$(A^{*\lambda\nu}A_{\lambda\nu})\partial_{\mu}\left(\frac{\delta L}{\delta A_{\mu\sigma}}\right)=0,\tag{11.9.31}$$

于是，从$A_{\mu\nu}$的任一场方程经简单微分运算我们可以得到强守恒律和附加条件。如果

$$\frac{\delta L}{\delta A_{\mu\nu}}=A^{\mu\nu},\tag{11.9.32}$$

则由（11.9.31）得到

$$(A^{*\lambda\sigma}A_{\lambda\sigma})\partial_{\mu}A^{\mu\nu}=0.\tag{11.9.33}$$

所以

$$\partial_{\mu}A^{\mu\nu}=\begin{cases}0, & \text{如果}A^{*\lambda\sigma}A_{\lambda\sigma}\neq 0,\\ \text{任意}, & \text{如果}A^{*\lambda\sigma}A_{\lambda\sigma}=0,\end{cases}\tag{11.9.34}$$

因而，条件$A^{*\lambda\sigma}A_{\lambda\sigma}\neq 0$和条件$\partial_{[\tau}A_{\mu\nu]}=0$的满足导致Maxwell方程

$$\partial_{\mu}A^{\mu\nu}=0.\tag{11.9.35}$$

而且，作为（11.9.30）和（11.9.35）的结果，我们有

$$\Box A^{\mu\nu}=0。\tag{11.9.36}$$

（3） 二阶对称张量的规范场

如果在$V_4$中我们有一个二阶非退化对称张量场$S_{\mu\nu}$和具有(11.9.1)形式的连续坐标变换产生的$V_4$的自同构，那么条件(11.8.9)～(11.8.11)决定了由$V_4$的自同构产生的$S_{\mu\nu}$的变换(11.9.2)下不变的Lagrange函数和场方程的形式。不包含$S_{\mu\nu}$的导数的Lagrange函数有形式

$$L=\frac{1}{\sqrt{-S}},\tag{11.9.37}$$

这里$S=\det(S_{\mu\nu})$。而依赖于$S_{\mu\nu}$和它的第一、第二阶导数的Lagrange函数则退化为

$$\hat{L}=\sqrt{-S}R,\tag{11.9.38}$$

这里$R$是按照从度量张量得到Riemann空间的数值曲率的完全同样的方向从量$S_{\mu\nu}$得到的一个数值，其中在指标缩并运算中用到的$S^{\mu\sigma}$是满足条件$S^{\rho\sigma}S_{\sigma\lambda}=\delta^\rho_\lambda$的$S_{\sigma\lambda}$的逆矩阵$S^{\mu\sigma}$。由不变性条件(11.8.9)～(11.8.11)自动得到的另一个结果是$S_{\mu\nu}$的导数仅通过组合形式$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$出现在Lagrange函数之中，这里$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$也是按照从度量张量得到第二类Christoffel符号的完全同样的方法（参见(11.9.5)）由$S_{\mu\nu}$产生的量。

由Lagrange函数关于$S^{\mu\nu}$的变分得到的EL方程就是Einstein方程

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}S_{\mu\nu}R=0,\tag{11.9.39}$$

这里的$R_{\mu\nu}$也是按相应的方法由$S_{\mu\nu}$产生的。

相应于变换(11.9.3)，Noether恒等式有形式

$$\frac{1}{2}\frac{\delta\hat{L}}{\partial S_{\mu\nu}}(\partial_\tau S_{\mu\nu}-\partial_\nu S_{\mu\tau}-\partial_\mu S_{\tau\nu})\equiv\partial_\nu\left(\frac{\delta\hat{L}}{\delta S_{\mu\nu}}\right)S_{\mu\tau},\tag{11.9.40}$$

或
$$\nabla_\nu\left(\frac{\delta\hat{L}}{\delta S_{\mu\nu}}\right)=0, \tag{11.9.41}$$

式中
$$\frac{\delta\hat{L}}{\delta S_{\mu\nu}}=\frac{\partial\hat{L}}{\partial S_{\mu\nu}}-\partial_\tau\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial(\partial_\tau S_{\mu\nu})}\right), \tag{11.9.42}$$

而协变导数$\nabla_\nu$同样地应形式地理解为相对于由$S_{\mu\nu}$和它的导数导出的连络符号而进行的。

方程（11.9.41）是一个强守恒律，它的生效不依赖于 Lagrange函数或EL方程组的特定形式，特别地，由它可导出众所周知的协变守恒律

$$\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}S^{\mu\nu}R\right)_{;\nu}=0. \tag{11.9.43}$$

在广义相对论中，方程(11.9.43)通常是作为由 Riemann 曲率张量满足的 Bianchi 恒等式的结果而得到的。但是这里它是Noether恒等式的一种表示，对任意对称张量场，例如介质的弹性应变张量，都是成立的。

现在设
$$\frac{\delta\hat{L}}{\delta S_{\mu\nu}}=T^{\mu\nu}, \tag{11.9.44}$$

这里$T^{\mu\nu}$是描述一个场的源的对称张量。于是（11.8.41）导致对$T^{\mu\nu}$的协变守恒律，即

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0. \tag{11.9.45}$$

因此，在广义相对论中，协变地恒等地满足的能量守恒律是来源于对场方程的 Noether 恒等式的强守恒律，而且是关于无限群$G_{\infty 4}$的不变性理论的一个结果。

## §11.10 弹性理论的 Lagrange 函数和固有规范群

众所周知，经典弹性理论只讨论协调的弹性变形，由应变协

调方程的几何意义可知，经典弹性理论讨论的变形是从三维欧氏空间到三维欧氏空间的同构。

设$R_3$表示弹性体参考构形所在的三维欧氏空间，它的整体笛卡尔直角坐标系为$\{X^A\}$，$A=1,2,3$。弹性体的参考构形是$R_3$中的有界单连通区域$\mathscr{B}$，设$R_3'$表示变形后的三维欧氏空间，它也有一个整体笛卡尔直角坐标$\{x^a\}$，$a=1,2,3$。于是弹性体的变形历史是微分同构

$$\mathbf{X}:\ \mathscr{B}\times[t_0,t_1]\to R_3'\times[t_0,t_1]:$$

$$\begin{cases} x^a=x^a(X^A,t), \quad a,A=1,2,3 \\ t=t, \end{cases} \tag{11.10.1}$$

它使得作用量泛函

$$S(x)=\int_{t_0}^{t}\int_{\mathscr{B}}L_0(X^A,t,x^a,\partial_A x^a,\partial_4 x^a)dV\wedge dt \tag{11.10.2}$$

取驻值。这里的 Lagrange 函数$L_0$对所有$a\in R$、所有常向量$\mathbf{b}$和所有满足条件$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{I}$的常数值正交张量$\mathbf{A}$满足不变性条件：

$$L_0(\mathbf{X},t+a,\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b},\mathbf{A}\partial_B\mathbf{x},\mathbf{A}\partial_4\mathbf{x})=L_0(\mathbf{X},t,\mathbf{x},\partial_B\mathbf{x},\partial_4\mathbf{x}). \tag{11.10.3}$$

从上述变分原理和不变性条件通过 Noether 定理就可得到弹性体的场方程和守恒律，并且得到非线性连续统的经典理论。

弹性理论中的 Lagrange 函数有形式

$$L_0=T-V(C_{AB}), \quad A,B=1,2,3 \tag{11.10.4}$$

这里$T$表示动能

$$T=-\frac{1}{2}\rho\partial_4 x^a\delta_{a\beta}\partial_4 x^\beta, \quad 1\leqslant a,\beta\leqslant 3. \tag{11.10.5}$$

而$V(C_{AB})$是势能，它是Green 应变张量$C_{AB}$的函数，这里Green应变张量$C_{AB}$定义为

$$C_{AB}=\partial_A x^a\delta_{a\beta}\partial_B x^\beta. \tag{11.10.6}$$

如果我们引进四维的 Green 应变张量，它的分量是

$$C_{\mu\nu}=\partial_\mu x^\alpha \delta_{\alpha\beta}\partial_\nu x^\beta, \quad \mu,\nu=1,2,3,4 \tag{11.10.7}$$

即

$$[C_{\mu\nu}]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}, \tag{11.10.8}$$

那么 Lagrange 函数$L_0$是$C_{\mu\nu}$的函数

$$L_0=L_0(C_{\mu\nu})=T(C_{44})-V(C_{AB}). \tag{11.10.9}$$

位置向量$\mathbf{x}$可作如下变换

$$\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}, \quad \mathbf{A}\in SO(3),\ \mathbf{b}\in T(3), \tag{11.10.10}$$

这里$\mathbf{A}$是正常的与$\mathbf{x}$无关的正交张量，$SO(3)$表示正常的正交群，$\mathbf{b}$是与$\mathbf{x}$无关的向量，$T(3)$表示平移群。下面我们将证明$SO(3)$和$T(3)$的积空间$G_0$就是弹性体的对称变换群。

事实上，表达式（11.10.7）可写成

$$C_{\mu\nu}=\partial_\mu \mathbf{x}\partial_\nu \mathbf{x}, \tag{11.10.11}$$

于是在群$G_0$的作用即在变换（11.10.10）下有

$$C'_{\mu\nu}=\partial_\mu \mathbf{x}'\partial_\nu \mathbf{x}'=\partial_\mu \mathbf{x}\mathbf{A}^T\mathbf{A}\partial_\nu \mathbf{x}=\partial_\mu \mathbf{x}\partial_\nu \mathbf{x}=C_{\mu\nu}, \tag{11.10.12}$$

由此看出，Lagrange 函数$L_0$在群$G_0$的作用下不变：

$$L_0(C'_{\mu\nu})=L_0(C_{\mu\nu}). \tag{11.10.13}$$

因此，群$G_0$是$L_0$的固有的对称变换群。容易看到，由群$SO(3)$和群$T(3)$的子群构成的积空间也都是$L_0$的对称变换群。

例如，线性弹性理论中物质点的运动可用位移向量在选定的笛卡尔直角坐标中的分量

$$u_i=u_i(x_j,t), \quad 1\leqslant i,j\leqslant 3 \tag{11.10.14}$$

表示。小变形应变张量为

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}), \tag{11.10.15}$$

应力应变关系为

$$\sigma_{ij}=E_{ijkl}e_{ij}, \tag{11.10.16}$$

式中$E_{ijkl}$是具有对称性

$$E_{ijkl}=E_{jikl}=E_{ijlk}=E_{klij} \tag{11.10.17}$$

的弹性系数张量，在本例中，我们重复的小写拉丁字母从1到3求和（不再区分上下标）。应变能密度为

$$W=\frac{1}{2}E_{ijkl}u_{i,j}u_{k,l}, \tag{11.10.18}$$

动能密度为

$$K=\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i, \tag{11.10.19}$$

而动量密度为

$$p_i=\rho\dot{u}_i, \tag{11.10.20}$$

经典连续统中的作用量泛函为

$$S_0(u_i)=\int_{t_0}^{t}\int_V L_0(u_{i,j},\ \dot{u}_i)dVdt, \tag{11.10.21}$$

其中Lagrange 函数

$$L_0(u_{i,j},\ \dot{u}_i)=K-W=\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i-\frac{1}{2}E_{ijkl}u_{i,j}u_{k,l}. \tag{11.10.22}$$

于是，当变换群为由$SO(3)$和$T(3)$的子群组成的积空间，我们由 Noether 定理将得到相应的守恒律。例如，我们称

$$G_{01}:\ \begin{cases}t'=t+\varepsilon\\ x_i'=x_i\\ u_i'=u_i\end{cases} \tag{11.10.23}$$

为时间平移群，这里$\varepsilon$为充分小的常量。

若作用量泛函 $S_0(u_i)$ 在时间平移群 $G_{01}$ 下具有无穷小不变性，则由 Noether 定理（11.7.5）～（11.7.6）有守恒律

$$\frac{d}{dt}\left(L_0-\frac{\partial L_0}{\partial \dot{u}_i}\dot{u}_i\right)+\left(-\frac{\partial L_0}{\partial u_{i,j}}\dot{u}_i\right)_{,j}=0, \qquad (11.10.24)$$

即

$$\frac{d}{dt}\left(W+\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i^2\right)-(\dot{u}_i\sigma_{ij})_{,j}=0. \qquad (11.10.25)$$

注意到动能密度的定义（11.10.19），即有

$$\frac{d}{dt}(W+K)=(\dot{u}_i\sigma_{ij})_{,j} \qquad (11.10.26)$$

两边作体积分并对右边用散度定理得到积分型守恒律

$$\frac{d}{dt}\int_V (W+K)dV=\oint_{\partial V}\dot{u}_i\sigma_{ij}n_j dS. \qquad (11.10.27)$$

该式表明弹性场的总能量$\int_V (W+K)dV$ 关于时间的变化率等于作用在边界$\partial V$上的牵引力 $f_i=\sigma_{ij}n_j$ 的功率。因此作用量泛函$S_0(u_i)$在时间平移群$G_{01}$下的不变性导致能量守恒律。

如果时间$t$和场量$u_i$作恒等变换，只是空间变量作平移变换，即

$$G_{02}:\begin{cases}t'=t\\ x_i'=x_i+\delta_{ij}e_j\\ u_i'=u_i\end{cases} \qquad (11.10.28)$$

这里$e_j(j=1,2,3)$是充分小的常数，$G_{02}$称为空间平移群。

若作用量泛函$S_0(u_i)$在空间平移群$G_{02}$下具有无穷小不变性，则由 Noether 定理有守恒律

$$\frac{d}{dt}(\rho\dot{u}_j u_{j,i})-(L_0\delta_{ik}+u_{j,i}\sigma_{jk})_{,k}=0, \qquad (11.10.29)$$

或经求体积分并用散度定理后得到积分型守恒律：

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\dot{u}_j u_{j,i}dV=\oint_{\partial V}(L_0 n_i+u_{j,i}\sigma_{jk}n_k)dS. \qquad (11.10.30)$$

该守恒律反映了空间的均匀性。

变换群

$$G_{03}: \begin{cases} t'=t \\ x_i'=x_i \\ u_i'=u_i+e_j\delta_{ij} \end{cases} \tag{11.10.31}$$

称为**刚体平移群**，这里$\varepsilon_j$，$1\leqslant j\leqslant 3$，是充分小的常数。

若作用量泛函 $S_0(u_i)$ 在刚体平移群 $G_{03}$ 下具有无穷小不变性，则由 Noether 定理有守恒律

$$\frac{d}{dt}(\rho_i\dot{u})-\sigma_{ik,k}=0 \tag{11.10.32}$$

或经求体积分并用 Gauss 定理后得积分型守恒律

$$\frac{d}{dt}\int_V\rho\dot{u}_i dV=\oint_{\partial V}\sigma_{ik}n_k dS, \tag{11.10.33}$$

由动量密度的定义（11.10.20）又得

$$\frac{d}{dt}\int_V p_i\, dV=\oint_{\partial V}\sigma_{ik}n_k dS. \tag{11.10.34}$$

该式表明，区域$V$内总动量关于时间的变化率等于作用在边界$\partial V$上的总牵引力。因此，刚体平移群$G_{03}$下的不变性导致动量守恒律。

变换群

$$G_{04}: \begin{cases} t'=t(1+\varepsilon) \\ x_i'=x_i(1+\varepsilon) \\ u_i'=u_i(1+\varepsilon) \end{cases} \tag{11.10.35}$$

称为时空与场量的标度变换族。其中$\varepsilon$是充分小的常量。

若作用量泛函$S_0(u_i)$在标度变换族$G_{04}$下具有无穷小不变性，则由 Noether 定理有守恒律

$$\frac{\partial}{\partial t}[tL_0-\rho\dot{u}_i(t\dot{u}_i+x_ju_{i,j}+u_i)]$$

$$+[x_k L_0+\sigma_{ik}(t\dot{u}_i+x_j u_{i,j}+u_i)]_{,k}=0$$

(11.10.36)

或积分型守恒律

$$\frac{d}{dt}\int_V [tL_0-\rho\dot{u}_i(t\dot{u}_i+x_j u_{i,j}+u_i)]dV$$

$$+\oint_{\partial V}[x_k L_0+\sigma_{ik}(t\dot{u}_i+x_j u_{i,j}+u_i)]n_k dS=0$$

(11.10.37)

变换群

$$G_{06}:\begin{cases}t'=t\\ x_i'=x_i\\ u_i'=u_i+\epsilon_{ijk}x_j e_k\end{cases} \quad (11.10.38)$$

为无穷小刚体旋转群，式中$\varepsilon_k$，$1\leqslant k\leqslant 3$，为充分小的常量。

若作用量泛函$S_0(u_i)$在无穷小刚体旋转群$G_{06}$下具有无穷小不变性，则由Noether定理有守恒律

$$\frac{d}{dt}(\rho\epsilon_{ijk}x_j\dot{u}_k)-(\epsilon_{ijm}x_j\sigma_{mk})_{,k}=0 \quad (11.10.39)$$

或积分型守恒律

$$\frac{d}{dt}\int_V(\rho\epsilon_{ijk}x_j\dot{u}_k)dV=\oint_{\partial V}\epsilon_{ijm}x_j\sigma_{mk}n_k dS. \quad (11.10.40)$$

上式右端是区域$V$内总的动量矩关于时间的变化率，而右边的面积分是边界曲面$\partial V$上总牵引力矩。因此，作用量泛函$S_0(u_i)$在无穷小刚体旋转群$G_{06}$下的不变性，导致动量矩守恒律。总之，我们已经看到，从 Lagrange 函数$L_0$的各固有规范群，可导出相应的各种守恒律。

## §11.11 位错和向错场的Lagrange 函数结构

为了讨论位错和向错的规范场及确定它的 Lagrange 函数的

结构，我们先回顾一下在§11.4中讨论过的杨-Mills最小耦合原理。

我们给定一个用向量$\psi$的分量$\psi_a$作为场量的场，它的Lagrange 函数为

$$L=L(\psi_a, \psi_{a,\mu}) \tag{11.11.1}$$

并且设李群$G$是整体规范群，即场量变换为

$$\psi'(x)=u\psi(x), \quad \forall u\in G. \tag{11.11.2}$$

因为$G$是整体规范群，场量的梯度的变换也是

$$\partial_\mu\psi'=\partial_\mu(u\psi)=u\partial_\mu\psi, \quad \forall u\in G, \tag{11.11.3}$$

与场量的变换是一样的。从而

$$L(\psi',\partial_\mu\psi')=L(u\psi,u\partial_\mu\psi)=L(\psi,\partial_\mu\psi), \ \forall u\in G. \tag{11.11.4}$$

上式表明Lagrange 函数在整体规范群下具有不变性。

然而，如果$G$是定域规范群，场量的变换为

$$\psi'(x)=u(x)\psi(x), \tag{11.11.5}$$

那么，场量的梯度的变换不再有(11.11.3)的形式，而是

$$\begin{aligned}\partial_\mu\psi'=\partial_\mu[u(x)\psi(x)]&=\partial_\mu u(x)\psi(x)+u(x)\partial_\mu\psi(x)\\&\neq u(x)\partial_\mu\psi(x).\end{aligned} \tag{11.11.6}$$

这时 Lagrange 函数(11.11.1)的不变性(11.11.4)也就不再成立了。按照§11.4中介绍的方法，我们可以引进规范场 $A_\mu(x)$，用协变导数

$$D_\mu=\partial_\mu+A_\mu \tag{11.11.7}$$

代替偏导数而使 (11.11.3) 式，从而 (11.11.4) 式仍然成立。这样的规范场 $A_\mu$ 是与规范群$G$紧密相连的。由(11.4.9)知

$$A_\mu(x)=-igA^a_\mu(x)T_a, \tag{11.11.8}$$

这里 $T_a$ 是 $G$ 的生成子。这样，从原来的场$\psi(x)$耦合出一个新场 $A_\mu(x)$，这就是杨-Mills 最小耦合原理。这时，一方面规范势伴随着协变导数进入场量$\psi(x)$的 Lagrange 函数 $L(\psi,D_\mu\psi)$中去，

另一方面，自由的规范场的 Lagrange 函数可表成

$$L_1=L_1(A_\mu^a,\ A_{\mu,\nu}^a),\tag{11.11.9}$$

它仅依赖于规范势$A_\mu^a$和它的导数，并且关于规范群$G$具有不变性。而整个场的Lagrange 函数有形式

$$L=L_0(\psi_a,D_\mu\psi_a)+s_1L_1(A_\mu^a,\partial_\nu A_\mu^a),\tag{11.11.10}$$

式中$s_1$是反映交互作用的新的一个耦合常数。

现在我们应用最小耦合原理来讨论位错和向错场。在经典连续统的基础上，我们将位错和向错作为经典连续统的规范场引进来，这时，经典连续统就是基态。在位错和向错同时存在于经典连续统的情况下，总畸变张量$\boldsymbol{\beta}^T$由三部分组成

$$\boldsymbol{\beta}^T=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}^P=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{x}\tag{11.11.11}$$

第一部分$\boldsymbol{\beta}$是弹性畸变，第二部分和第三部分之和$\boldsymbol{\beta}^P=\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{x}$统称塑性畸变，第二部分$\boldsymbol{\phi}$是由位错引起的塑性畸变部分，由位错的定义可知它与平移群$T(3)$有关，它决定着空间的挠率；第三部分$\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{x}$是由向错引起的塑性畸变部分，由向错的定义可知它与旋转群$SO(3)$有关，它描述物质基元的自旋并且决定着空间的曲率。因此我们可将$\boldsymbol{\Gamma}$写成

$$\Gamma_{\mu\gamma}^{\beta}=W_\mu^aT_{a\gamma}^{\beta},\quad \mu=1,2,3,4;\ \alpha,\beta,\gamma=1,2,3,\tag{11.11.12}$$

这里$T_{a\gamma}^{\beta}$是$SO(3)$的生成元$\mathbf{T}_a$（它是3×3矩阵，参见(11.3.4)）的矩阵元(常数)。而一般地$\phi_\mu^a=\phi_\mu^a(\mathbf{x})$，$W_\mu^a=W_\mu^a(\mathbf{x})$是$x^\mu$的函数。于是(11.11.11)可写成

$$\beta^T{}_\mu^a=\partial_\mu x^a+\phi_\mu^a+W_\mu^\beta T_{\beta\gamma}^a x^\gamma.\tag{11.11.13}$$

这时，速度向量为

$$V^a=\partial_4x^a+\phi_4^a+W_4^\beta T_{\beta\gamma}^a x^\gamma,\tag{11.11.14}$$

而位错密度为

$$\alpha^{\mu\beta}=\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\{\partial_\nu\phi_\lambda^\beta-\partial_\lambda\phi_\nu^\beta+T_{a\gamma}^\beta[W_\nu^a\phi_\lambda^\gamma$$

$$-W^{\sigma}_{\lambda}\phi^{\gamma}_{\nu}+x^{\gamma}(\partial_{\nu}W^{\sigma}_{\lambda}-\partial_{\lambda}W^{\sigma}_{\nu}$$
$$+f^{\sigma}_{\delta\sigma}W^{\delta}_{\nu}W^{\sigma}_{\lambda})]\},\tag{11.11.15}$$

其中$f^{\sigma}_{\delta\sigma}$是由

$$[\mathbf{T}_{\delta},\mathbf{T}_{\sigma}]=if^{\sigma}_{\delta\sigma}\mathbf{T}_{\sigma}\tag{11.11.16}$$

决定的群 $G$ 的结构常数（参见(11.3.2)式)。类似地可求得各种描述位错和向错的量。在无向错即 $W^{\sigma}_{\mu}=0$ 的情况，便得到只含位错时的各种表示

$$\beta^{T\alpha}_{\mu}=\partial_{\mu}x^{\alpha}+\phi^{\alpha}_{\mu},\tag{11.11.17}$$

$$V^{\alpha}=\partial_{4}x^{\alpha}+\phi^{\alpha}_{4},\tag{11.11.18}$$

$$\alpha^{\mu\beta}=\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}(\partial_{\nu}\phi^{\beta}_{\lambda}-\partial_{\lambda}\phi^{\beta}_{\nu}).\tag{11.11.19}$$

上节我们已经讨论过，经典弹性的Lagrange函数是

$$L_0=T-V(C_{AB}),\tag{11.11.20}$$

在各向同性线弹性的情况，上式变成

$$L_0=-\frac{1}{2}\rho_0\partial_4x^{\alpha}\delta_{\alpha\beta}\partial_4x^{\beta}-\frac{1}{2}[\lambda(e_{AB}\delta^{AB})^2$$
$$+2\mu(e_{AB}\delta^{AC}\delta^{BD}e_{CD})],\tag{11.11.21}$$

这里

$$e_{AB}=\frac{1}{2}(C_{AB}-\delta_{AB})=\frac{1}{2}(\partial_Ax^{\alpha}\delta_{\alpha\beta}\partial_Bx^{\beta}-\delta_{AB})\tag{11.11.22}$$

是 Almansi-Hamel 应变张量，在线性化的情况它就是小变形应变张量，$\lambda$ 和 $\mu$ 是拉梅系数，$\rho_0$ 是参考构形中的质量密度。

为了从(11.11.21)得到位错和向错场的 Lagrange 函数，按照定域规范场理论的杨-Mills 最小耦合原理，可令

$$\partial_{\mu}\to D_{\mu}=\partial_{\mu}+\mathbf{A}_{\mu},\tag{11.11.23}$$

其中规范场$\mathbf{A}_{\mu}$由$\Gamma$ 和 $\phi$ 决定，即

$$\partial_{\mu}x^{\alpha}\to\beta^{T\alpha}_{\mu}=\partial_{\mu}x^{\alpha}+W^{\beta}_{\mu}T^{\alpha}_{\beta\gamma}x^{\gamma}+\phi^{\alpha}_{\mu}.\tag{11.11.24}$$

这时 Lagrange 函数应有形式

$$L = L_E + L_W + L_\phi, \tag{11.11.25}$$

其中：$L_E$是由$L_0$经用$D_\mu$代替$\partial_\mu$而得到的，即

$$L_E = -\frac{1}{2}\rho_0 \beta^{T\,\alpha}_{\ 4}\delta_{\alpha\beta}\beta^{T\,\beta}_{\ 4} - \frac{1}{2}[\lambda(E_{AB}\delta^{AB})^2 - 2\mu E_{AB}\delta^{AC}\delta^{BD}E_{CD}], \tag{11.11.26}$$

式中

$$E_{AB} = \frac{1}{2}(\beta^{T\,\alpha}_{\ A}\delta_{\alpha\gamma}\beta^{T\,\gamma}_{\ B} - \delta_{AB}), \tag{11.11.27}$$

而$\beta^{T\,\alpha}_{\ A}$由(11.11.13)给出。$L_E$描述了物质的弹性性质。易见它在$G_0$的作用下是不变的

$$L_W = -\frac{1}{2}s_2 f_{\alpha\beta}F^{\alpha}_{\mu\nu}g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}F^{\beta}_{\sigma\lambda}, \tag{11.11.28}$$

式中

$$F^{\alpha}_{\mu\nu} = \partial_\mu W^{\alpha}_{\nu} - \partial_\nu W^{\alpha}_{\mu} + f^{\alpha}_{\beta\gamma}W^{\beta}_{\mu}W^{\gamma}_{\nu}, \tag{11.11.29}$$

而

$$f_{\alpha\beta} = f^{\gamma}_{\alpha\delta}f^{\delta}_{\gamma\beta} = f_{\beta\alpha} \tag{11.11.30}$$

称为群$G_0$的 Gartan-Killing 度量。$g^{\mu\nu}$由下式定义：

$$g^{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{当}\ \mu = \nu \neq 4 \\ 0, & \mu \neq \nu \\ \dfrac{1}{\zeta}, & \mu = \nu = 4. \end{cases} \tag{11.11.31}$$

$L_W$ 是描写向错的作用的部分

$$L_\phi = -\frac{1}{2}s_1\delta_{\alpha\beta}D^{\alpha}_{\mu\nu}K^{\mu\sigma}K^{\nu\lambda}D^{\beta}_{\sigma\lambda}, \tag{11.11.32}$$

式中

$$D^{\alpha}_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi^{\alpha}_{\nu} - \partial_\nu\phi^{\alpha}_{\mu} + T^{\alpha}_{\beta\gamma}(W^{\beta}_{\mu}\phi^{\gamma}_{\nu} - W^{\beta}_{\nu}\phi^{\gamma}_{\mu} + F^{\beta}_{\mu\nu}x^{\gamma}) \tag{11.11.33}$$

而

$$K^{\mu\nu}=\begin{cases}1, & 当\mu=\nu\neq 4\\ 0, & \mu\neq\nu\\ \dfrac{1}{Y}, & \mu=\nu=4,\end{cases} \tag{11.11.34}$$

$L_\phi$是描述位错的作用的部分。易见 Lagrange 函数(11.11.25)是$L_0$的自然推广，它带有四个可调整的常数：$s_1$和$s_2$是两个耦合常数，而$\zeta=1/g^{44}$和$Y=1/K^{44}$是二个所谓的“传布参数”。各式的详细推导可参见[26]。

将Lagrange函数(11.11.25)对$x^a$，$W^a_\mu$和$\phi^a_\mu$分别求变分可得各种场方程，并且，完全类似于上一节的讨论，引用 Noether 定理可得到对应的守恒定律。

位错和向错的规范场理论是近几年才展开的研究领域，还有许多工作有待人们去完成。

# 主要参考文献


[1] 欧发，关于宏观位错动力学的基本方程问题，哈尔滨工业大学学报，3—4 (1978)，196.

[2] 陈省身、陈维桓，《微分几何讲义》，北京大学出版社 (1983).

[3] 郭仲衡，《非线性弹性理论》，科学出版社 (1980).

[4] 江泽涵，《拓扑学引论》，上海科学技术出版社 (1978).

[5] 胡瑶光，《规范场论》，华东师范大学出版社 (1984).

[6] 李灏、陈树坚，《断裂理论基础》，《应用数学和力学》讲座丛书，四川人民出版社 (1983).

[7] 龙期威、董连科，《微观与宏观相结合的断裂力学，微观缺陷和断裂理论》，第45期《应用数学和力学》讲座讲义 (1986).

[8] 德冈辰雄，《理性连续介质力学入门》，科学出版社 (1982).

[9] 山本善之、近藤一夫，《有限变位弹性论，变形几何学》，上海科学技术出版社 (1961).

[10] И·M·盖尔芳特，Г·E·希洛夫，《广义函数 I》，科学出版社 (1965).

[11] 《晶体缺陷和金属强度》(上册)，1960 年固体物理理论学习报告汇编，科学出版社 (1965).

[12] Bardeen, J. and C. Herring, *Imperfections in Nearly Perfect Crystals* (1952).

[13] Bilby, B. A., Continuous distributions of dislocations, in: *Progress in Solid Mechanics*, ed. I. N. Sneddon and R. Hill, North-Holland (1960).

[14] Bilby, B. A., R. Bullough and E. Smith, Continuous distributions of dislocations; A new application of the methods of non-Riemannian geometry, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A231 (1955), 253.

[15] Bloom, F., *Modern Differential Goemetric Techniques in the Theory of Continuous Distribution of Dislocations*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1979).

[16] Colman, B. D. and W. Noll, Material symmetry thermostatic inequalities in finite elastic deformations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 15 (1964), 87.

[17] de Wit, R., Linear theory of static disclinations, in: *Fundamental Aspects of Dislications*, Nat. Bur. Stand. (U. S.), Spec. Publ. 317, Vol. 1 (1970), 651—673.

[18] de Wit, R., Theory of disclinations, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 77A (1973), No. 1, 49—100, No. 3, 359—368, No. 5, 607—658.

[19] de Wit, R., A view of the relation between the continuum theory of lattice defects and non-Euclidean geometry in the linear approximation, *Int. J. Engng. Sci.*, 19 (1981), 1475.

[20] Edelen, D. G. B., On a closure of the governing equations of defect dynamics and the resulting theory of the plastic state, *Int. J. Engng. Sci.*, 17 (1979), 441.

[21] Edelen, D. G. B., A four-dimensional formulation of defect dynamics and some of its consequences, *Int. J. Engng. Sci.*, 18 (1980), 1095.

[22] Eshelby, J. D., The continuum theory of lattice defects, in: *Solid State Physics*, Vol. 3, ed. F. Seitz and D. Turnbull, Academic Press, New York (1966), 79.

[23] Eshelby, J. D., Elastic inclusions and inhomogeneities, in: *Progress in Solid Mechanics*, Vol. 2, ed. I. N. Sneddon and R. Hill, North-Holland, Amsterdam (1961), 89.

[24] Frank, F. C. and W. T. Read, Multiplication processes for slow moving dislocations, *Phys. Rev.*, 79 (1950), 722.

[25] Golebiewska-Lasota, A. A., Dislocations and gauge invariance, *Int. J. Engng. Sci.*, 17 (1979), 329.

[26] Kadic, A. and D. G. B. Edelen, *A Gauge Theory of Dislocations and Disclinations*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1983).

[27] Knowles, J. K. and E. Sternberg, On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 44 (1972), 187.

[28] Kobayashi, S. and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1., Interscience Publ., New York London (1963).

[29] Kondo, K., On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding, in: *Proc. 2nd. Japan Nat. Congr. Applied Mech.*, Tokyo (1952), 41.

[30] Kondo, K., *Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Sciences by Means of Geometry*, RAAG Vols. 1—4, Gakujutsu Benken Fukyu-Kai, Tokyo (1955).

[31] Konopleva, N. P. and V. N. Popov, *Gauge Fields*, Harwood Academic Publ., Chur London New York (1981).

[32] Kosevich, A. M., Crystal dislocations and the theory of elasticity, in: *Dislocations in Solids*, ed. F. R. N. Nabarro, North-Holland (1980).

[33] Kröner, E., *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg (1958).

[34] Kröner, E., *Continuum Theory of Defects*, Les Houches, Serrion XXXV, 1980-*Physics of Defects*, ed. R. Balian et al., North-Holland Publ. Comp. (1981).

[35] Mura, T., The continuum theory of dislocations, in: *Advances in Materials Research*, Vol. 3, ed. H. Hermann, Interscience (1968).

[36] Noether, E., *Invariante Variations Problem*, Göttinger Nachrichten, Mathematisch-Physicalische Klasse, 2 (1918), 235.

[37] Noll, W., Materially uniform simple bodies with inhomogeneities, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 27 (1967), 1.

[38] Noll, W., R. A. Toupin and C.-C. Wang, *Continuum Theory of Inhomogeneities in Simple Bodies*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1968).

[39] Schouten, J. A., *Ricci-Calculus*, 2nd, Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg (1954).

[40] Steenrod, N. E., *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ. Press, Princeton (1951).

[41] Truesdell, C. and C.-C. Wang, *Introduction to Rational Elasticity*, Noordhoff International Publ., Leyden (1973).

[42] Volterra, V., Sur l'équalibre des corps élastiques multiplement connexes, *Ann. Sci. Ecole Norm. Super.*, 3, Ser., 24 (1907), 401.

[43] Wang, C.-C., On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 27 (1967), 33.

[44] Wang, C.-C., *Mathematical Principles of Mechanics and Electromagnetism*, Part A, Plenum Press, New York London (1979).

[45] Weingarten, G., Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi, *Atti Accad. Lincei Rend.*, 5, 10 (1901), 57.

[46] Yang, C. N. and R. L. Mills, Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, *Phys. Rev.*, 96 (1954), 191.

# 索　引

X



Y



Z